D 19

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 170

Heft 3

Ausgegeben den 2. Januar 1934

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1934

Band 170. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

v. Sz. Nagy, Julius, Über die Lage der nichtreellen Nullstellen von reellen Polynomen und von gewissen reellen ganzen Funktionen 133

— — Über die nichtreellen Nullstellen von reellen ganzen Funktionen . 148

Haupt, Otto, Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung 154

Mahler, Kurt, Über die rationalen Punkte auf Kurven vom Geschlecht Eins 168

Svenson, Erik, Beiträge zur Theorie gewisser Integraltypen 179

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Über die Lage der nichtreellen Nullstellen von reellen Polynomen und von gewissen reellen ganzen Funktionen.

Von *Julius v. Sz. Nagy* in Szeged (Ungarn).

§ 1. Einleitung.

1. Eine ganze Funktion ist reell, wenn ihr Wert in jedem Punkte der reellen Achse reell ist. Ist $f(z)$ ein reelles Polynom oder eine reelle ganze Funktion vom Geschlecht Null oder Eins und ist γ eine nichtnegative reelle Konstante, so wird die ganze Funktion

$$F(z) = e^{-\gamma z^2} f(z)$$

eine ganze Funktion vom erhöhten Geschlecht Eins oder kurz *eine ganze Funktion vom Geschlecht* 1* genannt werden[1]).

Wir bezeichnen mit H_k eine Hyperbel, deren Hauptachse die Verbindungsstrecke eines konjugiert imaginären Nullstellenpaares der k-ten Ableitung $F^{(k)}(z)$ von $F(z)$ ist, und deren Nebenachse $\sqrt{k}$-mal so groß ist, wie die Hauptachse. Dann beweisen wir unter anderem, daß die Funktion $F(z)$ auf der Hyperbel H_k oder an ihrer inneren Seite (von der keine Tangenten an H_k gehen), mindestens zweimal verschwinden muß.

2. Die Punkte x der reellen Achse, für die

$$F(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad K(x) = \begin{vmatrix} F(x) & F'(x) \\ F'(x) & F''(x) \end{vmatrix} \geqq 0$$

ist, werden *verallgemeinerte kritische Punkte erster Ordnung* oder kurz *kritische Punkte erster Ordnung* für die ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* genannt. Die Punkte der reellen Achse, für die

$$F(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad K_p(x) = \begin{vmatrix} F^{(p-1)}(x) & F^{(p)}(x) \\ F^{(p)}(x) & F^{(p+1)}(x) \end{vmatrix} \geqq 0 \qquad (p \geqq 1)$$

ist, sind *kritische Punkte p-ter Ordnung* der Funktion $F(z)$.

Die kritischen Punkte verschiedener Ordnungen bilden zusammen die kritischen Punkte von $F(z)$.

Die so definierten kritischen Punkte enthalten die Fourierschen kritischen Punkte[2]) in sich, sie weichen aber von diesen Punkten im allgemeinen ab.

Auch für die verallgemeinerten kritischen Punkte erster und höherer Ordnung gelten die für die Fourierschen kritischen Punkte von G. Pólya herrührenden Sätze[3]).

---

[1]) Vgl. G. Pólya: „Über die algebraisch-funktionentheoretischen Untersuchungen von J. W. V. Jensen", Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Math.-fys. Meddelelser VII, 17 (1927), S. 6 und „Some problems connected with Fourier's work on transcendental equations", The Quarterly Journal of Math. Oxford Series Vol. I (1930), S. 24. Letztere Arbeit (S. 21—34) wird im folgenden kurz unter dem Namen G. Pólya zitiert.

[2]) Vgl. G. Pólya, S. 24—25.

[3]) Vgl. G. Pólya, S. 30—31.

3. Durch die (verallgemeinerten oder Fourierschen) kritischen Punkte kann man gewisse Bernoullische Lemniskaten bestimmen, deren Rand oder Inneres mindestens ein Paar der konjugiert komplexen Nullstellen von $F(z)$ enthält.

Nach Fourier entspricht jedem Fourierschen kritischen Punkte eines reellen Polynoms ein Paar seiner nichtreellen Nullstellen. Gauß (Werke, Bd. III, S. 120) hielt es für zweifelhaft, „ob jedem Fourierschen kritischen Punkte ein bestimmtes Paar imaginärer Nullstellen angehörte“[4]). Gauß hat sich mit diesem Problem noch in drei Briefen an Schumacher beschäftigt. Im ersten Briefe (vom 2. April 1833) glaubte Gauß „auf das klarste nachweisen zu können, daß ein solcher Zusammenhang nicht existiert“[5]). Drei Jahre später (am 20. Juni 1836) fand es Gauß „nicht wahrscheinlich, daß sich dennoch eine Brücke zwischen Fouriers kritischen Punkten und bestimmten Paaren von imaginären Nullstellen schlagen läßt“[6]). Vier Tage später (am 24. Juni 1836) gelangte aber Gauß „zur Bestärkung seiner früheren Ansicht, daß es einen in der Natur der Sache liegenden allgemeinen willkürfreien Zusammenhang zwischen den einzelnen kritischen Punkten und den einzelnen Paaren von imaginären Nullstellen gar nicht gibt“[7]).

Unsere Sätze geben zwar auf die von Gauß aufgeworfene Frage keine endgültige Antwort, sie lassen aber durch jeden kritischen Punkt erster Ordnung ein im allgemeinen endliches Gebiet bestimmen, das mindestens ein Paar der konjugiert imaginären Nullstellen des reellen Polynoms enthält.

§ 2. Sätze mit Hyperbeln.

Nennt man die Menge der Punkte der komplexen Ebene, aus denen zwei verschiedene bzw. keine Tangenten an eine Hyperbel der Ebene gezogen werden können, die äußere bzw. innere Seite der Hyperbel, so gilt der folgende Satz:

1. *Ist $f(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten oder eine reelle ganze Funktion vom Geschlecht Null oder Eins, sind β und $\bar{\beta}$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar der ganzen Funktion $f'(z) + (az + b) f(z)$, wo a und b beliebige reelle Zahlen bedeuten, und bezeichnet H die gleichseitige Hyperbel, deren Hauptachse die Strecke $\beta\bar{\beta}$ ist, so liegt mindestens eine Nullstelle von $f(z)$ an der inneren bzw. äußeren Seite der Hyperbel H im Falle $a < 0$ bzw. $a > 0$. Ist $a = 0$, so hat die Funktion $f(z)$ entweder an beiden Seiten von H Nullstellen, oder alle Nullstellen auf der Hyperbel H.*

Zum Beweise dieses Satzes können wir annehmen, daß $\beta = i$ und $\bar{\beta} = -i$ ist und die ganze Funktion $f(z)$ die Form

$$(1) \qquad f(z) = z^m e^{cz+d} \prod \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}}$$

hat, wo m eine nichtnegative ganze Zahl ist und c und d reelle Zahlen sind. Die Nullstellen α_k von $f(z)$ sind reell oder paarweise konjugiert komplex, weil die Funktion $f(z)$ reell ist.

Führt man die Bezeichnungen $\alpha_k = x_k + iy_k$ und $0 = \alpha_0 = x_0 + iy_0$ ein, so besteht die Gleichung

---

[4]) Fourier: „Analyse des équations déterminées“, Paris 1831, S. 27, 28 und 155, „Die Auflösung der bestimmten Gleichungen“, herausgegeben von A. Loewy, Ostwalds Klassiker (1902), S. 24, 25 und 149.

[5]) Gauß Werke Bd. X 1 (1917), S. 131.

[6]) A. a. O., S. 131—132.

[7]) A. a. O., S. 132—133. Vgl. auch die Bemerkung von A. Loewy (Gauß Werke, Bd. X 1, S. 134) und die folgende Arbeit von L. Schlesinger: „Über Gauß' funktionentheoretische Arbeiten“, S. 188—189. Ich danke Herrn Prof. Schlesinger, meine Aufmerksamkeit auf die angedeuteten Briefe von Gauß gelenkt zu haben.

$$\frac{f'(i)+(ai+b)f(i)}{f(i)} - \frac{f'(-i)+(-ai+b)f(-i)}{f(-i)}$$
$$= -2i\left[-a+\frac{m}{\alpha_0^2+1}+\sum\frac{1}{\alpha_k^2+1}\right]=0.$$

Für den reellen Teil des im Klammerzeichen stehenden Ausdruckes besteht die Gleichung

$$(2)\qquad -a+\frac{m(x_0^2-y_0^2+1)}{(x_0^2-y_0^2+1)^2+4x_0^2y_0^2}+\sum\frac{x_k^2-y_k^2+1}{(x_k^2-y_k^2+1)^2+4x_k^2y_k^2}=0.$$

Es gibt also in dieser Gleichung im Falle $a>0$ mindestens einen positiven Zähler, im Falle $a<0$ mindestens einen negativen Zähler, im Falle $a=0$ mindestens einen positiven und einen negativen Zähler, oder nur verschwindende Zähler, womit der Satz I bewiesen ist.

Aus dem Satze I folgt der Satz:

II. *Ist $F(z)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht 1* und ist H eine gleichseitige Hyperbel, deren Hauptachse die Verbindungsstrecke eines konjugiert imaginären Nullstellenpaares der Ableitung $F'(z)$ von $F(z)$ ist, so verschwindet die Funktion $F(z)$ mindestens zweimal auf der Hyperbel H oder an ihrer inneren Seite.*

Ist nämlich

$$F(z)=e^{-\gamma z^2+\delta z}f(z)\qquad(\gamma\geqq 0),$$

so ist

$$F'(z)=e^{-\gamma z^2+\delta z}\,[f'(z)+(-2\gamma z+\delta)f(z)].$$

Aus dem Beweise des Satzes I folgt, daß *der Satz I auch dann gültig ist, wenn die ganze Funktion $f(z)$ nicht reell und der Wert b komplex ist, wenn aber a reell, β und $\overline{\beta}$ konjugiert komplex sind*[8]).

2. Der Satz I läßt sich auf folgende Weise verallgemeinern:

III. *Ist $f(z)$ ein Polynom mit rellen Koeffizienten oder eine reelle ganze Funktion vom Geschlecht Null oder Eins, ist*

$$g(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots+A_kz^k$$

ein Polynom mit lauter reellen Nullstellen, und ist β und $\overline{\beta}$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar der Funktion

$$F_k(z)=A_0f(z)+A_1f'(z)+\cdots+A_kf^{(k)}(z)=g(0)\,f(z)+\frac{g'(0)}{1!}f'(z)+\cdots+\frac{g^{(k)}(0)}{k!}f^{(k)}(z),$$

so hat die Funktion $f(z)$ stets Nullstellen an der abgeschlossenen inneren Seite der Hyperbel H_k, deren Hauptachse die Strecke $\beta\overline{\beta}$ ist und deren Nebenachse $\sqrt{k}$-mal so groß ist, wie die Hauptachse.

Die abgeschlossene innere Seite der Hyperbel ist von den Punkten der Hyperbel und von den Punkten ihrer inneren Seite gebildet.

Ist

$$g(z)=A_kz^k+A_{k-1}z^{k-1}+\cdots+A_1z+A_0=A_k(z+b_1)(z+b_2)\cdots(z+b_k)$$

und sind

$$G_1(z)=f'(z)+b_1f(z),\quad G_2(z)=G_1'(z)+b_2G_1(z),\ \ldots,\quad G_k(z)=G_{k-1}'(z)+b_kG_{k-1}(z),$$

so ist offenbar

$$F_k(z)=A_kG_k(z)=A_0f(z)+A_1f'(z)+\cdots+A_kf^{(k)}(z).$$

---

[8]) Vgl. Julius v. Sz. Nagy: „Zur Theorie der algebraischen Gleichungen", Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver. Bd. 31 (1922), S. 238—251; insbesondere S. 250—251.

Zum Beweise nehmen wir an, daß der Satz III für $k-1$ richtig ist. Ist also β und $\overline{\beta}$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar der Funktion $G_k(z)$, so hat die Funktion $G_1(z) = f'(z) + b_1 f(z)$ stets Nullstellen an der abgeschlossenen inneren Seite der Hyperbel H_{k-1} mit der Hauptachse $\beta\overline{\beta}$, deren Nebenachse $\sqrt{k-1}$-mal so groß ist, wie die Hauptachse.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $\beta = i$ und $\overline{\beta} = -i$ ist. Die Gleichung der Hyperbel H_{k-1} ist dann

$$(k-1)\,y^2 - x^2 - k + 1 = 0\,.$$

Nach dem Satze I hat die Funktion $f(z)$ stets Nullstellen an der inneren Seite einer jeden gleichseitigen Hyperbel H_1, die durch ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar von $G_1(z)$ bestimmt ist, oder alle Nullstellen von $f(z)$ liegen auf der Hyperbel. Ist $\xi \pm \eta i$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar von $G_1(z)$, das an der abgeschlossenen inneren Seite der Hyperbel H_{k-1} liegt, so ist die Gleichung von H_1

$$y^2 - (x-\xi)^2 = \eta^2 \geqq 1 + \frac{\xi^2}{k-1}\,,$$

weil $|\eta|$ nicht kleiner ist, als die entsprechende Halbsehne der Hyperbel H_{k-1}.

Die Gleichung der Hyperbel H_1 läßt sich auf folgende Weise schreiben:

$$k\,y^2 - x^2 - k = (k-1)\,x^2 + k\,\eta^2 - 2k\,\xi\,x + k\,\xi^2 - k \geqq (k-1)\left[x - \frac{k}{k-1}\,\xi\right]^2 \geqq 0\,.$$

Daraus folgt, daß die Punkte der Hyperbel H_1 an der abgeschlossenen inneren Seite der Hyperbel H_k liegen.

Auf Grund des Beweises von III läßt sich auch der folgende Satz beweisen:

IV. *Ist $f(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten oder eine reelle ganze Funktion vom Geschlecht Null oder Eins, sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ nicht negative reelle Zahlen, von denen nicht alle verschwinden, sind $b_1, b_2, \ldots, b_k$ beliebige reelle Zahlen, sind ferner*

$$G_1(z) = f'(z) + (b_1 - \gamma_1 z)\,f(z),\ G_2(z) = G_1'(z) + (b_2 - \gamma_2 z)\,G_1(z), \ldots,$$
$$G_k(z) = G_{k-1}'(z) + (b_k - \gamma_k z)\,G_{k-1}(z),$$

und ist endlich β und $\overline{\beta}$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar der Funktion $G_k(z)$, so hat die Funktion $f(z)$ mindestens ein Paar von Nullstellen an der inneren Seite der Hyperbel mit der Hauptachse $\beta\overline{\beta}$ und mit der $\sqrt{k}$-mal größeren Nebenachse.

Aus diesem Satz folgt der Satz:

V. *Ist $F(z)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht 1*, ist β und $\overline{\beta}$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar der k-ten Ableitung $F^{(k)}(z)$, und ist H_k eine Hyperbel, deren Hauptachse die Verbindungsstrecke $\beta\overline{\beta}$ ist und deren Nebenachse $\sqrt{k}$-mal so groß ist, so verschwindet die Funktion $F(z)$ mindestens zweimal entweder auf der Hyperbel H_k oder an ihrer inneren Seite.*

Die Funktion $F(z)$ hat nämlich die Form $F(z) = e^{-\gamma z^2} f(z)$, wo γ eine nichtnegative reelle Zahl und $f(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten oder eine reelle ganze Funktion vom Geschlecht Null oder Eins ist. Daraus folgt, daß

$$F'(z) = e^{-\gamma z^2}[f'(z) - 2\gamma z f(z)] = e^{-\gamma z^2} G_1(z),\quad F''(z) = e^{-\gamma z^2}[G_1'(z) - 2\gamma z G_1(z)] = e^{-\gamma z^2} G_2(z)$$

usw. sind. Damit ist der Satz V bewiesen.

3. Die Sätze I—V sind analog zu den Sätzen, die von J. L. W. V. Jensen ausgesprochen [9]) und vom Verfasser bewiesen und verallgemeinert wurden [10]).

---

[9]) J. L. W. V. Jensen: „Recherches sur la théorie des équations", Acta Math. Bd. 36 (1913), S. 190.

[10]) Siehe die in der Fußnote [8]) angeführte Arbeit, S. 238—244.

Es gilt nämlich unter anderem der Satz:

Jede nichtreelle Nullstelle der k-ten Ableitung $F^{(k)}(z)$ einer ganzen Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* liegt mindestens in einer Jensenschen Ellipse k-ter Art. Eine Jensensche Ellipse k-ter Art hat in der Verbindungsstrecke eines konjugiert komplexen Nullstellenpaares von $F(z)$ die Nebenachse, ihre Hauptachse ist $\sqrt{k}$-mal so groß.

Eine Jensensche Ellipse erster Art ist ein Kreis, ein Jensenscher Kreis.

§ 3. Über die Fourierschen kritischen Punkte.

Die reelle Zahl x ist für die ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* ein *Fourierscher k-facher kritischer Punkt $(p+1)$-ter Ordnung*, wenn

$$F^{(p)}(x) \neq 0, \quad F^{(p+1)}(x) = F^{(p+2)}(x) = \cdots = F^{(p+m)}(x) = 0, \quad F^{(p+m+1)}(x) \neq 0$$
$$(p \geqq 0, \quad m \geqq 1)$$

sind. Die Multiplizität k hat hier den Wert $\frac{m}{2}$, wenn m eine gerade Zahl ist, und den Wert $\frac{m+1}{2}$ bzw. $\frac{m-1}{2}$, wenn m eine ungerade Zahl und $F^{(p)}(x)\,F^{(p+m+1)}(x)$ positiv bzw. negativ ist. Diese kritische Multiplizität ist der Differenz der Vorzeichenwechsel in den zwei Folgen

$$F^{(p)}(x-\varepsilon), \quad F^{(p+1)}(x-\varepsilon), \ldots, \quad F^{(p+m)}(x-\varepsilon), \quad F^{(p+m+1)}(x-\varepsilon)$$
$$F^{(p)}(x+\varepsilon), \quad F^{(p+1)}(x+\varepsilon), \ldots, \quad F^{(p+m)}(x+\varepsilon), \quad F^{(p+m+1)}(x+\varepsilon)$$

gleich, wo ε eine genügend kleine positive Größe bedeutet.

Die Summe der kritischen Multiplizitäten der Fourierschen kritischen Punkte verschiedener Ordnungen ist die Anzahl der Fourierschen kritischen Punkte der betreffenden ganzen Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1*.

Aus der Definition folgt, daß jeder Punkt x, in dem die reelle Funktion $F(z)$ ein positives Minimum oder ein negatives Maximum annimmt, ein Fourierscher kritischer Punkt erster Ordnung in bezug auf die Funktion $F(z)$ ist ($m = k = p + 1 = 1$). Ist der Punkt $[x_0, F(x_0)]$ ein Wendepunkt der Kurve $y = F(x)$, dessen Wendetangente mit der x-Achse parallel ist, und ist $F(x_0) \neq 0$, so ist x_0 wieder ein Fourierscher kritischer Punkt erster Ordnung für $F(z)$.

Bezeichnet N_{ab}, N'_{ab} bzw. K_{ab} die Anzahl der reellen Nullstellen der Funktionen $F(z)$, $F'(z)$ bzw. die Anzahl der Fourierschen kritischen Punkte erster Ordnung in dem Intervalle (a, b) (jeder Punkt mit seiner Multiplizität gerechnet) und ist $F(a)\,F(b)\,F'(a)\,F'(b) \neq 0$, so hat G. Pólya bewiesen [11]), daß

$$N_{ab} + 2\,K_{ab} - N'_{ab} = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{sgn} F(b)\,F'(b) - \operatorname{sgn} F(a)\,F'(a)\right)$$

ist. Es gilt auch der Satz:

VI. *Ist N bzw. N' die Anzahl der reellen Nullstellen der ganzen Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* bzw. ihrer Ableitung $F'(z)$ und ist K die Anzahl der Fourierschen kritischen Punkte erster Ordnung für die Funktion $F(z)$, so ist $2\,K = N' - N + 1$. Liegen zwischen zwei benachbarten reellen Nullstellen von $F(z)$ mehrere Nullstellen von $F'(z)$, und ordnet man diese Nullstellen von $F'(z)$ ihrer Größe nach, so ist die zweite, vierte, sechste usw. je ein Fourierscher kritischer Punkt erster Ordnung in bezug auf die Funktion $F(z)$, die erste, dritte usw. ist aber kein Fourierscher kritischer Punkt erster Ordnung für $F(z)$. Hat die Funktion $F'(z)$ eine reelle Nullstelle, die größer (kleiner) ist, als die größte (kleinste) reelle*

[11]) G. Pólya, a. a. O., S. 28—30.

Nullstelle von $F(z)$, so hat die Funktion $F'(z)$ eine gerade Anzahl solcher reellen Nullstellen. Ordnet man diese Nullstellen von $F'(z)$ ihrer Größe nach zunehmend (abnehmend), so sind die zweite, vierte, sechste usw. Fouriersche kritische Punkte erster Ordnung, die übrigen Nullstellen sind aber keine kritischen Punkte erster Ordnung in bezug auf die Funktion $F(z)$.

Nach der Definition der mehrfachen Fourierschen kritischen Punkte hat dieser Satz auch dann einen Sinn, wenn $F'(z)$ auch mehrfache reelle Nullstellen hat. Es genügt, den Satz nur für den Fall zu beweisen, daß die betreffenden reellen Nullstellen von $F'(z)$ alle einfach sind.

Der erste Teil des Satzes folgt aus dem Satze von G. Pólya.

Hat die Funktion $F'(z)$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen a und b von $F(z)$ $(a < b)$ $2k+1$ einfache Nullstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k+1}$, so hat die Funktion $F(z)$ im Intervalle (a, b) dasselbe Vorzeichen. Sie nimmt in den Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$ extremale Werte an und zwar in $x_2, x_4, \ldots, x_{2k}$ positive Minima bzw. negative Maxima, je nachdem das Vorzeichen von $F(z)$ im Intervalle (a, b) positiv bzw. negativ ist.

Ist nun β die größte reelle Nullstelle von $F(z)$, so sind

$$\operatorname{sgn} F(+\infty)\, F'(+\infty) = 1, \quad \operatorname{sgn} F(+\infty)\, F(\beta+\varepsilon) = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn} F(\beta+\varepsilon)\, F'(\beta+\varepsilon) = 1,$$

wo ε eine genügend kleine positive Größe bedeutet. Daraus folgt, daß $\operatorname{sgn} F'(\beta+\varepsilon)\, F'(+\infty) = 1$ ist. Die Funktion $F'(z)$ hat also im Intervalle $(\beta+\varepsilon, +\infty)$ eine gerade Anzahl der Nullstellen. Sind $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k}$ diese Nullstellen, so hat die Funktion $F(z)$ in den Punkten $x_2, x_4, \ldots, x_{2k}$ positive Maxima bzw. negative Maxima, je nachdem die Funktion $F(z)$ im Intervalle $(\beta+\varepsilon, +\infty)$ positiv bzw. negativ ist. Analog beweist man den Satz im Falle, daß $F'(z)$ eine reelle Nullstelle hat, die kleiner als die kleinste Nullstelle von $F(z)$ ist. Damit ist der Satz VI bewiesen.

§ 4. Verallgemeinerte kritische Punkte. Kritische Intervalle.

Die Punkte x der reellen Achse, für die

$$F(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad K(x) = \begin{vmatrix} F(x) & F'(x) \\ F'(x) & F''(x) \end{vmatrix} \geqq 0, \tag{3}$$

sind *verallgemeinerte kritische Punkte erster Ordnung* oder kurz *kritische Punkte erster Ordnung* in bezug auf die ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1*.

Die Menge M dieser Punkte enthält jeden Fourierschen kritischen Punkt erster Ordnung für $F(z)$. Für einen solchen kritischen Punkt ξ sind nämlich $F(\xi) \neq 0$, $F'(\xi) = 0$ und $F(\xi)\, F''(\xi) \geqq 0$, und daher $K(\xi) \geqq 0$.

Hat die Funktion $F(z)$ die Form

$$F(z) = e^{-\gamma z^2} \cdot f(z) = e^{-\gamma z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2}\, z^m \prod \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}},$$

so ist

$$\frac{d^2 \log F(z)}{dz^2} = \frac{F(z)\, F''(z) - [F'(z)]^2}{F^2(z)} = -2\gamma - \frac{m}{z^2} - \sum \frac{1}{(z-\alpha_k)^2}.$$

Daraus folgt, daß $K(z)$, *die kritische Funktion $K(z)$ erster Ordnung* in bezug auf die Funktion $F(z)$, durch

$$K(z) = F^2(z) \left[-2\gamma - \sum \frac{1}{(z-\alpha_k)^2}\right] \tag{4}$$

gegeben ist, wo jede Nullstelle (auch die eventuelle Nullstelle 0) von $F(z)$ in der Summe so oft vorkommt, wie ihre Multiplizität angibt.

Bezeichnen $c_1, c_2, \ldots$ die reellen, $a_1 \pm i\,b_1,\ a_2 \pm i\,b_2, \ldots$ die konjugiert imaginären Nullstellen von $F(z)$ (wo jede Nullstelle in der einen bzw. anderen Folge so oft vorkommt, wie ihre Multiplizität angibt), und faßt man die konjugiert imaginären Glieder in der Summe (4) zusammen, so ist

$$(5) \qquad K(z) = F^2(z)\left[-2\gamma - \sum \frac{1}{(z-c_k)^2} + 2\sum \frac{b_k^2 - (z-a_k)^2}{[b_k^2 + (z-a_k)^2]^2}\right].$$

Die Menge M der kritischen Punkte erster Ordnung kann aus gewissen Intervallen bestehen. Diese Intervalle sind *kritische Intervalle erster Ordnung* in bezug auf die ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1*.

Die Endpunkte eines kritischen Intervalles erster Ordnung sind Nullstellen der Funktion $K(z)$. Einige dieser kritischen Intervalle können in einen Punkt degenerieren, der eine Nullstelle gerader Multiplizität für die kritische Funktion $K(z)$ erster Ordnung ist.

Für die kritischen Intervalle erster Ordnung gilt der Satz:

VII. *Sind die nichtreellen Nullstellen der ganzen Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* beschränkt und hat die zugehörige kritische Funktion $K(z)$ erster Ordnung nur $2q$ reelle Nullstellen $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{2q}$, so sind die Intervalle $(x_1, x_2), (x_3, x_4), \ldots, (x_{2q-1}, x_{2q})$ kritische Intervalle erster Ordnung.*

[Sind $x_{2h+1} = x_{2h+2} = \cdots = x_{2h+2m}$, so fallen die Intervalle (x_{2h+1}, x_{2h+2}), $(x_{2h+3}, x_{2h+4}), \ldots, (x_{2h+2m-1}, x_{2h+2m})$ in einen Punkt zusammen.]

Die kritische Funktion $K(z)$ hat in den Intervallen $(-\infty, x_1)$ und $(x_{2q}, +\infty)$ keine Nullstelle, sie behält also in diesen Intervallen ihr Vorzeichen. Zum Beweise des Satzes VII müssen wir nur zeigen, daß es in den Intervallen $(-\infty, x_1)$ und $(x_{2q}, +\infty)$ mindestens je einen solchen Punkt x_0 gibt, wo $F(x_0) \neq 0$ und $K(x_0) < 0$ sind.

Es gibt in den Intervallen $(-\infty, x_1)$ und $(x_{2q}, +\infty)$ solche Punkte x_0, für welche die Ungleichungen $(x_0 - a_k)^2 > b_k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ bestehen. In einem solchen Punkte x_0 nimmt die Funktion $K(x_0)$ auch dann einen negativen Wert an, wenn $\gamma = 0$ ist und die Funktion $F(z)$ keine reelle Nullstelle hat. Damit ist der Satz VII bewiesen.

Es ist klar, daß jeder Fouriersche kritische Punkt ξ erster Ordnung, für den $F''(\xi) \neq 0$ ist, ein innerer Punkt eines kritischen Intervalles erster Ordnung ist, und daß eine reelle Nullstelle der Funktion $F'(z)$ nur dann im Innern eines kritischen Intervalles erster Ordnung liegen kann, wenn sie ein Fourierscher kritischer Punkt erster Ordnung ist.

Ist $F(z)$ eine ganze Funktion vom Geschlechte 1*, so nennen wir die ganze Funktion

$$(6) \qquad K_p(z) = \begin{vmatrix} F^{(p-1)}(z) & F^{(p)}(z) \\ F^{(p)}(z) & F^{(p+1)}(z) \end{vmatrix} \qquad (p \geqq 1)$$

kritische Funktion p-ter Ordnung in bezug auf die Funktion $F(z)$. Die Punkte x der reellen Achse, für die

$$F^{(p-1)}(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad K_p(x) \geqq 0,$$

sind *kritische Punkte p-ter Ordnung* in bezug auf $F(z)$. Die Menge M_p dieser Punkte kann aus gewissen Intervallen, aus den *kritischen Intervallen p-ter Ordnung*, bestehen.

Für die kritischen Punkte p-ter Ordnung gelten entsprechende Sätze, wie für die kritischen Punkte erster Ordnung: Jeder Fouriersche kritische Punkt p-ter Ordnung ist ein verallgemeinerter kritischer Punkt und liegt im Innern eines kritischen Intervalles p-ter Ordnung, wenn dort die Funktion $F^{(p+1)}(x)$ von Null abweicht.

Wir führen noch eine Benennung ein. Ist $\gamma > 0$ oder hat die ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* auch reelle Nullstellen, so nennen wir die Intervalle der reellen

x-Punkte, in denen

$$(7)\quad F(x)\neq 0 \text{ und } \overline{K}(x)=K(x)+F^2(x)\left[2\gamma+\sum\frac{1}{(x-c_h)^2}\right]=2F^2(x)\sum\frac{b_k^2-(x-a_k)^2}{[b_k^2+(x-a_k)^2]^2}\geqq 0$$

sind, *verlängerte kritische Intervalle erster Ordnung.*

Die kritischen Intervalle erster Ordnung sind offenbar Teile der verlängerten kritischen Intervalle erster Ordnung. Die Intervalle der reellen x-Punkte, in denen

$$(8)\qquad F(x)\neq 0 \text{ und } \overline{\overline{K}}(x)=K(x)+2\gamma F^2(x)\geqq 0$$

sind, liegen in den verlängerten kritischen Intervallen erster Ordnung und enthalten die kritischen Intervalle erster Ordnung.

§ 5. Die kritischen Punkte und die Lage der nichtreellen Nullstellen.

1. Aus der Form (5) der kritischen Funktion erster Ordnung

$$K(x)=F^2(x)\left[-2\gamma-\sum\frac{1}{(x-c_k)^2}+2\sum\frac{b_k^2-(x-a_k)^2}{[b_k^2+(x-a_h)^2]^2}\right]$$

folgt, daß die Ungleichungen $F(x)\neq 0$ und $K(x)\geqq 0$ nur dann bestehen können, wenn es mindestens ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar $a_k\pm ib_k$ von $F(z)$ gibt, für welches $b_k^2\geqq(x-a_k)^2$ ist. Gibt es kein solches konjugiert komplexes Nullstellenpaar $a_k\pm ib_k$ von $F(z)$, für welches $b_k>(x-a_k)^2$ ist, so muß die Gleichung $b_k^2=(x-a_k)^2$ für jeden Index bestehen. In diesem Falle ist $\gamma=0$, und die Funktion $F(z)$ kann keine reelle Nullstelle haben.

Daraus folgt der Satz:

VIII. *Ist x ein kritischer Punkt erster Ordnung in bezug auf eine ganze Funktion vom Geschlecht 1* und ist W_x der rechtwinklige Doppelwinkelraum mit dem Scheitel x, dessen Winkelhalbierende zu der imaginären Achse parallel ist, so liegt mindestens ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar von $F(z)$ im Winkelraume W_x. Das Innere von W_x enthält nur dann keine Nullstelle von $F(z)$, wenn die Nullstellen von $F(z)$ alle auf den Randgeraden von W_x liegen. Die Funktion $F(z)$ hat in diesem Falle höchstens das Geschlecht Eins und hat keine reelle Nullstelle.*

Der erste Teil dieses Satzes gilt auf Grund der Ungleichungen (7) auch dann, wenn x ein beliebiger Punkt der verlängerten kritischen Intervalle erster Ordnung ist.

Auf Grund der Definition der Jensenschen Kreise (§ 2, 3) läßt sich der Satz VIII auf folgende Weise ausdrücken:

IX. *Ist $F(z)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht 1*, so liegt kein kritischer Punkt erster Ordnung außerhalb aller Jensenschen Kreise von $F(z)$. Es kann nur dann einen kritischen Punkt erster Ordnung geben, der in keinem Jensenschen Kreise liegt, wenn dieser kritische Punkt ein gemeinsamer Punkt sämtlicher Jensenschen Kreislinien ist. Die Funktion $F(z)$ hat in diesem Falle höchstens das Geschlecht Eins und hat keine reelle Nullstelle.*

Es gilt auch der folgende Satz:

X. *Jedes verlängerte kritische Intervall erster Ordnung für eine ganze Funktion vom Geschlecht 1* liegt mindestens in einem Jensenschen Kreise der Funktion $F(z)$.*

2. Der Satz VIII läßt sich auf folgende Weise verallgemeinern:

XI. *Ist x ein kritischer Punkt p-ter Ordnung in bezug auf die ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1*, so enthält der Doppelwinkelraum $W_x(p)$ von der Öffnung $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{p}$, dessen Scheitel der Punkt x ist und dessen Winkelhalbierende zu der imaginären Achse parallel ist, mindestens ein nichtreelles Nullstellenpaar von $F(z)$.*

Auf Grund der Definition der Jensenschen Ellipsen p-ter Art (§ 2, 3) läßt sich dieser Satz auch auf folgende Weise ausdrücken:

XII. *Jedes kritische Intervall p-ter Ordnung in bezug auf eine ganze Funktion vom Geschlecht* 1* *liegt im Gebiete mindestens einer Jensenschen Ellipse p-ter Art in bezug auf die Funktion* $F(z)$.

Der Satz XI ist im Falle $p = 1$ schon bewiesen (Satz VIII). Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß der Punkt x in Satz XI mit dem Punkt 0 zusammenfällt.

Nach Satz VIII hat die Funktion $F^{(p-1)}(z)$ mindestens ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar $a + ib$, für welches $b^2 \geqq a^2$ ist.

Nach Satz V hat die Funktion $F(z)$ mindenstens ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar an der abgeschlossenen inneren Seite der Hyperbel

$$(p-1)\,y^2 - (x-a)^2 - (p-1)\,b^2 = 0.$$

Die Berührungspunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Tangenten, die aus dem Punkte 0 an diese Hyperbel gehen, sind

$$x_1 = x_2 = a\left[1 + (p-1)\frac{b^2}{a^2}\right], \qquad y_1 = -y_2 = b\left[1 + (p-1)\frac{b^2}{a^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Daraus folgt, daß

$$\frac{x_1}{y_1} = -\frac{x_2}{y_2} = \left[\frac{a^2}{b^2} + (p-1)\right]^{\frac{1}{2}} \leqq \sqrt{p}$$

ist, weil $b^2 \geqq a^2$ ist. Damit sind die Sätze XI und XII bewiesen.

Für Fouriersche kritische Punkte rühren die ersten Teile der Sätze VIII und IX und die Sätze XI und XII von G. Pólya her [12]). Wir haben diese Sätze unabhängig von G. Pólya gefunden.

Wir bemerken noch, daß ein kritischer Punkt erster (bzw. p-ter) Ordnung im Satze VIII (bzw. XI) dieselbe Rolle spielt, wie ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar von $F'(z)$ (bzw. von $F^{(p)}(z)$) im Satze II (bzw. V), wenn die zwei Punkte des Nullstellenpaares zu einander unendlich nahe kommen.

§ 6. Über Lemniskatenbereiche für die nichtreellen Nullstellen.

1. Aus der Gleichung (5) folgt die Gleichung

$$\frac{K(x)}{F^2(x)} + 2\gamma + \sum \frac{1}{(c_k - x)^2} = 2\sum \frac{b_k^2 - (a_k - x)^2}{[b_k^2 + (a_k - x)^2]^2}. \tag{9}$$

Führt man die Bezeichnungen

$$\frac{K(x)}{F^2(x)} = \frac{1}{R^2}, \qquad 2\gamma = \frac{1}{R_\gamma^2}, \qquad (c_k - x)^2 = R_k^2 \quad \text{und} \quad a_k - x + ib_k = r_k\, e^{i\varphi_k} \tag{10}$$

ein, so hat die vorige Gleichung die Form

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_\gamma^2} + \sum \frac{1}{R_k^2} = -2\sum \frac{\cos 2\varphi_k}{r_k^2}. \tag{11}$$

Bezeichnet W_x bzw. RW_x den rechtwinkligen Doppelwinkelraum, dessen Scheitel der Punkt x der reellen Achse und dessen Winkelhalbierende zu der imaginären Achse parallel ist bzw. die reelle Achse selbst ist, so ist $\cos 2\varphi_k < 0, > 0$ bzw. $= 0$, je nachdem die betreffende Nullstelle von $F(z)$ im Innern von W_x, von RW_x bzw. auf einem Schenkel der Winkelräume W_x und RW_x liegt.

---

[12]) Siehe die Fußnote [3]).

Wir fassen die positiven bzw. negativen Glieder der Summe $\sum \frac{\cos 2\varphi_k}{r_k^2}$ in die Teilsumme Σ' bzw. Σ'' zusammen und ordnen beide Summen nach abnehmender Größe der absoluten Beträge ihrer Glieder.

Führen wir für je eine Nullstelle $a_k + ib_k$, die im Winkelraume W_x liegt, die Bezeichnung

$$(a_k - x) + ib_k = \varrho_k e^{i\varphi_k} = \varrho_k e^{i\left(\psi_k + \frac{\pi}{2}\right)}$$

ein, so hat das entsprechende Glied von Σ'' die Form $-\frac{\cos 2\psi_k}{\varrho_k^2}$.

Schreiben wir in beiden Teilsummen den aufeinanderfolgenden Gliedern die Indizes 1, 2, ... zu, so hat die Gleichung (11) die Form

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_\gamma^2} + \sum \frac{1}{R_k^2} + 2\sum' \frac{\cos 2\varphi_k}{r_k^2} = 2\sum'' \frac{\cos 2\psi_k}{\varrho_k^2}, \tag{12}$$

wo

$$\frac{\cos 2\varphi_1}{r_1^2} \geqq \frac{\cos 2\varphi_2}{r_2^2} \geqq \cdots \quad \text{und} \quad \frac{\cos 2\psi_1}{\varrho_1^2} \geqq \frac{\cos 2\psi_2}{\varrho_2^2} \geqq \cdots \tag{13}$$

sind.

Zwei Glieder der Σ' bzw. Σ'' sind dann gleich, wenn die entsprechenden Nullstellen von $F(z)$ auf einer Bernoullischen Lemniskate liegen, deren Doppelpunkt der Punkt x ist und deren Hauptachse in die reelle Achse fällt bzw. zu der imaginären Achse parallel ist.

Versteht man unter dem Halbmesser einer Bernoullischen Lemniskate den größten Abstand ihrer Punkte von dem Doppelpunkte, so kann man auf Grund der Gleichung (12) den folgenden Satz behaupten:

XIII. *Es sei x ein beliebiger kritischer Punkt erster Ordnung in bezug auf eine reelle ganze Funktion*

$$F(z) = e^{-\gamma z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2} z^m \prod \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}} \qquad (\gamma \geqq 0)$$

vom Geschlecht 1. Führen wir durch jede Nullstelle von $F(z)$ und außerdem durch die zwei Punkte $x + \frac{F(x)}{\sqrt{K(x)}}$ und $x + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$ je eine Bernoullische Lemniskate hindurch, deren Doppelpunkt der Punkt x ist, und deren Hauptachse entweder in die reelle Achse fällt oder zu der imaginären Achse parallel ist, so haben die reziproken Quadrate der Halbmesser der Lemniskaten, deren Hauptachsen in die reelle Achse fallen bzw. zu der imaginären Achse parallel sind, gleiche Summe.*

Liegt entweder eine der Nullstellen von $F(z)$ auf den Schenkeln des Winkelraumes W_x, oder ist $K(x) = 0$ oder $\gamma = 0$, so degeneriert die entsprechende Bernoullische Lemniskate in die Schenkel von W_x. Der Halbmesser einer solchen degenerierten Lemniskate ist unendlich, weil das entsprechende Glied der Gleichung (12) verschwindet.

Der Satz XIII läßt sich auch auf die Punkte der verlängerten kritischen Intervalle ausdehnen, indem man $K(x)$ durch $\bar{K}(x)$ aus (7) ersetzt und in der Gleichung (12) $\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_\gamma^2} + \sum \frac{1}{R_k^2} = \frac{1}{\bar{R}^2}$ setzt, oder $K(x)$ durch $\bar{\bar{K}}(x)$ aus (8) ersetzt, wenn $\bar{\bar{K}}(x) \geqq 0$ ist, und in der Gleichung (12) $\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_\gamma^2} = \frac{1}{\bar{\bar{R}}^2}$ setzt. In dem entsprechenden Satze spielen

nur diejenigen Lemniskaten eine Rolle, die sich auf die Glieder der aus (12) umgeformten Gleichung beziehen.

2. Liegen höchstens $2q$ Nullstellen von $F(z)$ im Innern des Winkelraumes W_x oder hat die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ nichtreelle Nullstellen, so kann man auf Grund der Gleichung (12) und der Ungleichungen (13) eine Reihe von Ungleichungen ableiten. So bestehen die Ungleichungen:

$$(14) \qquad \frac{2q\cos 2\psi_1}{\varrho_1^2} \geqq \frac{1}{R_\gamma^2} = 2\gamma, \quad \text{oder} \quad \varrho_1^2 \leqq \frac{q}{\gamma}\cos 2\psi_1;$$

$$(15) \qquad \frac{2q\cos 2\psi_1}{\varrho_1^2} \geqq \frac{1}{R^2} = \frac{K(x)}{F^2(x)}, \quad \text{oder} \quad \varrho_1^2 \leqq 2q\,\frac{F^2(x)}{K(x)}\cos 2\psi_1;$$

$$(16) \qquad \frac{2q\cos 2\psi_1}{\varrho_1^2} \geqq \frac{1}{R_1^2}, \quad \text{oder} \quad \varrho_1^2 \leqq 2q\,R_1^2\cos 2\psi_1 \;(h \geqq 1);$$

$$(17) \qquad \frac{2q\cos 2\psi_1}{\varrho_1^2} \geqq \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}, \quad \text{oder} \quad \varrho_1^2 \leqq 2q\,\frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}\cos 2\psi_1 \quad (h \geqq 2);$$

$$(18) \qquad \frac{2q\cos 2\psi_1}{\varrho_1^2} \geqq \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_\gamma^2} + \sum \frac{1}{R_h^2};$$

$$(19) \qquad \frac{2q\cos 2\psi_1}{\varrho_1^2} \geqq \frac{p}{d^2}, \quad \text{oder} \quad \varrho_1^2 \leqq \frac{2q}{p}\,d^2\cos 2\psi_1,$$

wenn es auf der rechten Seite der Ungleichung (18) höchstens p Glieder gibt, die nicht kleiner als $\frac{1}{d^2}$ sind.

Wir bezeichnen im folgenden mit $L(x;\, a)$ eine Bernoullische Lemniskate, deren Doppelpunkt der Punkt x der reellen Achse, deren Hauptachse zu der imaginären Achse parallel ist und die den Halbmesser a hat. Der Bereich der Lemniskate $L(x;\, a)$ soll die Menge derjenigen Punkte der komplexen Ebene sein, die auf der Lemniskate und innerhalb ihrer Ovale liegen.

Auf Grund der Ungleichung (14) gilt also der Satz:

XIV. *Es sei $F(z)$ eine reelle ganze Funktion vom Geschlecht 2, die von der Form $F(z) = e^{-\gamma z^2} f(z)$ ist, wo γ eine positive Zahl und $f(z)$ ein Polynom oder eine ganze Funktion vom Geschlecht 0 oder 1 ist. Ist x ein beliebiger kritischer Punkt erster Ordnung in bezug auf $F(z)$ und hat die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ nichtreelle Nullstellen im rechtwinkligen Winkelraume W_x, so liegt mindestens ein Paar der Nullstellen von $F(z)$ im Lemniskatenbereiche $L\left(x;\, \sqrt{\frac{q}{\gamma}}\right)$. Das Innere dieses Bereiches enthält nur dann keine Nullstelle von $F(z)$, wenn x eine Nullstelle der kritischen Funktion $K(z)$ erster Ordnung und wenn $2q$ Nullstellen von $F(z)$ auf der Lemniskate $L\left(x;\, \sqrt{\frac{q}{\gamma}}\right)$ und die übrigen Nullstellen alle auf den Tangenten des Doppelpunktes dieser Lemniskate liegen.*

Aus diesem Satze folgt der Satz:

XV. *Es sei $F(z)$ eine reelle ganze Funktion vom Geschlecht 2, die von der Form $F(z) = e^{-\gamma z^2} f(z)$ ist, wo γ eine positive Zahl und $f(z)$ ein Polynom oder eine ganze Funktion vom Geschlecht 0 oder 1 ist. Hat die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ nichtreelle Nullstellen und liegen die imaginären Teile dieser Nullstellen alle außerhalb des Intervalles $\left(-\sqrt{\frac{q}{\gamma}}\, i,\; +\sqrt{\frac{q}{\gamma}}\, i\right)$ der imaginären Achse, so hat die Funktion $F(z)$ keinen kritischen Punkt erster Ordnung.*

Aus der Ungleichung (15) folgt der Satz:

XVI. *Ist x ein beliebiger kritischer Punkt erster Ordnung in bezug auf eine ganze Funktion vom Geschlecht 1* und hat die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ Nullstellen im rechtwinkligen Winkelraume W_x, so enthält der Bereich $L\left(x; \sqrt{2q}\frac{F(x)}{\sqrt{K(x)}}\right)$ mindestens zwei (nichtreelle) Nullstellen von $F(z)$. Das Innere dieses Bereiches enthält nur dann keine Nullstelle von $F(z)$, wenn die Funktion $F(z)$ höchstens vom Geschlecht 1 ist und wenn sie $2q$ Nullstellen auf der Lemniskate $L\left(x; \sqrt{2q}\frac{F(x)}{\sqrt{K(x)}}\right)$ und die übrigen Nullstellen alle auf den Randgeraden des Winkelraumes W_x hat.*

Die Ungleichung (16) läßt sich in einem Satze auf folgende Weise ausdrücken:

XVII. *Ist x ein kritischer Punkt erster Ordnung in bezug auf eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1*, und hat die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ Nullstellen im rechtwinkligen Winkelraume W_x und mindestens eine reelle Nullstelle, deren Abstand vom Punkte x nicht größer als R ist, so enthält der Lemniskatenbereich $L(x; R\sqrt{2q})$ mindestens zwei Nullstellen von $F(z)$. Das Innere dieses Bereiches enthält nur dann keine Nullstelle von $F(z)$, wenn* a) *das Geschlecht von $F(z)$ höchstens 1 ist,* b) *x eine Nullstelle der kritischen Funktion erster Ordnung ist,* c) *die Funktion $F(z)$ nur eine reelle Nullstelle hat, die von x im Abstande R liegt,* d) *die Funktion $F(z)$ $2q$ Nullstellen auf der Lemniskate $L(x; R\sqrt{2q})$ und die übrigen Nullstellen alle auf den Schenkeln von W_x hat.*

Aus der Ungleichung (19) folgt der Satz:

XVIII. *Ist x ein beliebiger kritischer Punkt erster Ordnung in bezug auf eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1*, hat die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ Nullstellen im Winkelraume W_x und mindestens p solche reellen Nullstellen, deren Abstände von x nicht größer als d sind, so enthält der Lemniskatenbereich $L\left(x; \sqrt{\frac{2q}{p}}\,d\right)$ mindestens zwei Nullstellen von $F(z)$. Das Innere dieses Bereiches enthält nur dann keine Nullstelle von $F(z)$, wenn* a) *das Geschlecht von $F(z)$ höchstens 1 ist,* b) *x eine Nullstelle der kritischen Funktion erster Ordnung ist,* c) *die Funktion $F(z)$ nur p reelle Nullstellen hat, die in den von x im Abstande d liegenden zwei Punkten zusammenfallen,* d) *die Funktion $F(z)$ $2q$ Nullstellen auf der Lemniskate $L\left(x; \sqrt{\frac{2q}{p}}\,d\right)$ und die übrigen Nullstellen alle auf den Randgeraden von W_x hat.*

Es ist nicht schwer, auch die Ungleichungen (17) und (18) in Sätzen auszudrücken.

§ 7. Über die Lage der nichtreellen Nullstellen in bezug auf die kritischen Punkte erster Ordnung, die zwischen zwei reellen Nullstellen der Funktion liegen.

Auf Grund der Ungleichung (17) läßt sich folgender Satz ableiten:

XIX. *Hat eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* zwischen zwei reellen Nullstellen c_h und c_k $(c_h < c_k)$ kritische Punkte erster Ordnung, und liegen höchstens $2q$ Nullstellen in je einem Winkelraume W_x, dessen Scheitelpunkt x ein beliebiger Punkt des Intervalles (c_h, c_k) ist, so läßt sich ein endlicher Bereich B bestimmen, der mindestens zwei nichtreelle Nullstellen von $F(z)$ enthält, ohne daß man die Lage der kritischen Punkte im Intervalle (c_h, c_k) kennen muß.*

Bedeutet nämlich E die Ellipse, deren Nebenachse das Intervall (c_h, c_k) ist und deren Hauptachse $\sqrt{q}$-mal so groß ist, und konstruiert man die möglichen Bernoullischen Lemnis-

katen, deren Hauptachsen die zur imaginären Achse parallelen Sehnen von E sind, so genügt jeder diese Lemniskatenbereiche enthaltende Bereich B dem Satze.

Zum Beweise können wir annehmen, daß $c_h = -c$ und $c_k = +c$ ist.

Ist nun x ein kritischer Punkt erster Ordnung in bezug auf $F(z)$ im Intervalle $(-c, c)$, so läßt sich die Ungleichung (17) in der Form

$$\frac{2q\cos 2\psi_1}{\varrho_1^2} \geqq \frac{1}{(c+x)^2} + \frac{1}{(c-x)^2} = 2\frac{c^2+x^2}{(c^2-x^2)^2} = \frac{2q}{y^2} \tag{20}$$

schreiben. Der Lemniskatenbereich $L(x; y)$ enthält also mindestens zwei Nullstellen von $F(z)$.

Aus (20) erhält man für x und y die Gleichung

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{qc^2} = 1 - 2\frac{x^2}{c^2}\frac{c^2-x^2}{c^2+x^2}. \tag{21}$$

Diejenigen Punkte dieser Kurve vierter Ordnung, deren x Abszissen im Intervalle $(-c, c)$ sind, liegen alle im Bereiche der Ellipse

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{qc^2} = 1.$$

Damit ist der Satz XIX bewiesen.

Aus dem Beweis folgt, daß die Ellipse im Satze XIX sich durch die Kurve (21) ersetzen läßt.

Aus der Gleichung (20) oder (21) folgt, daß

$$\frac{y^2}{q} = \frac{(c^2-x^2)^2}{c^2+x^2} = (c-x)^2\frac{(c+x)^2}{c^2+x^2} \leqq 2(c-x)^2$$

ist, woraus

$$|y_{\max}| = c\sqrt{q} \quad \text{und} \quad |x| + \left|\frac{y}{\sqrt{2q}}\right| \leqq c \qquad (|x| \leqq c) \tag{22}$$

sind.

Der maximale Abstand der Punkte einer Bernoullischen Lemniskate von ihrer Hauptachse ist, wie bekannt, $\frac{a}{\sqrt{8}}$, wenn a ihr Halbmesser ist.

Ist also $2q \leqq 8$, so liegt die Abszisse jedes Punktes der Lemniskate $L(x; y)$ nach (22) im Intervalle $(-c, c)$. Es gilt also der Satz:

XX. *Hat eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* in einem Intervalle D von der Länge d mindestens zwei reelle Nullstellen und zwischen diesen Nullstellen mindestens einen kritischen Punkt erster Ordnung, enthält ferner je ein rechtwinkliger Winkelraum W_z, der einem beliebigen Punkte des Intervalles D angehört, im Innern höchstens $2q$ ($\leqq 8$) nichtreelle Nullstellen von $F(z)$, so hat die Funktion $F(z)$ mindestens zwei nichtreelle Nullstellen im Rechteck, dessen Mittellinie das Intervall D und dessen Höhe $D\sqrt{q}$ ist*[13]).

§ 8. Sätze über berührende Kreise.

Wir beweisen den folgenden Satz:

XXI. *Es sei $F(z)$ eine reelle ganze Funktion von der Form*

$$F(z) = e^{\delta z} f(z),$$

---

[13]) Im Falle, daß die Funktion $F(z)$ ein Polynom ist, das höchstens 8 nichtreelle Nullstellen hat, und daß das Intervall D zwischen zwei aufeinanderfolgenden reellen Nullstellen von $F(z)$ mindestens einen Fourierschen kritischen Punkt erster Ordnung enthält, wurde der Satz XX von H. B. Mitchell in der Arbeit: „On the imaginary roots of a polynomial and the real roots of its derivative", Transactions of the Amer. Math. Soc. Bd. 19 (1918), S. 45—52. bewiesen.

wo δ eine reelle Zahl und $f(z)$ ein Polynom oder eine ganze Funktion vom Geschlecht 0 ist, und es sei x ein beliebiger Punkt der reellen Achse. Führt man durch je eine der Nullstellen von $F(z)$ und durch je einen der Punkte

$$\xi = x + \frac{F(x)}{F'(x)} \quad \text{und} \quad \xi_\delta = x - \frac{1}{\delta}$$

solche im Punkte x einander berührende Kreise hindurch, deren Mittelpunkte auf der reellen Achse liegen, so haben die Reziproken der Durchmesser der Kreise, die an der einen bzw. an der anderen Seite der gemeinsamen Tangente im Punkte x liegen, dieselbe Summe.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Nullstellen der Funktion $F(z)$, so besteht die Gleichung

$$\frac{F'(x)}{F(x)} - \delta + \sum \frac{1}{\alpha_k - x} = 0. \tag{23}$$

Es seien

$$\xi - x = \frac{F(x)}{F'(x)} = r\, e^{i\varphi} (\varphi = 0 \text{ oder } \pi), \quad \xi_\delta - x = -\frac{1}{\delta} = r_\delta\, e^{i\varphi_\delta} \ (\varphi_\delta = 0 \text{ oder } \pi),$$
$$\alpha_k - x = r_k\, e^{i\varphi_k} \quad \text{und} \quad d = \frac{r}{\cos\varphi}, \quad d_\delta = \frac{r_\delta}{\cos\varphi_\delta}, \quad d_k = \frac{r}{\cos\varphi_k} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{24}$$

so hat die Gleichung (23) die Form

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d_\delta} + \sum \frac{1}{d_k} = 0. \tag{25}$$

Damit ist der Satz XXI bewiesen. In der Gleichung (25) bedeutet nämlich d, d_δ, d_k die Länge des Durchmessers des entsprechenden Kreises, und zwar mit positivem bzw. negativem Vorzeichen, je nachdem der betreffende Kreis vom Punkte x rechts bzw. links liegt. Für einen Punkt α_k, der auf der gemeinsamen Tangente der Kreise liegt, ist $\frac{1}{d_k} = 0$.

Der Satz XXI läßt sich auf die Abgrenzung gewisser nichtreeller Nullstellen von $F(z)$ anwenden, wenn man den Wert δ und die reellen Nullstellen von $F(z)$ kennt und wenn die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $F(z)$ endlich ist.

Ist z. B. die Summe derjenigen Glieder von (25), die sich auf die Punkte ξ und ξ_δ und auf die reellen Nullstellen von $F(z)$ beziehen, negativ und gleich $-\frac{1}{D}$, so hat die Funktion $F(z)$ stets solche nichtreellen Nullstellen, deren reelle Teile größer als x sind. Ist $\frac{1}{d_1}$ das größte positive Glied unter den Gliedern von (25), die sich auf die nichtreellen Nullstellen von $F(z)$ beziehen und hat $F(z)$ höchstens $2q$ solche nichtreellen Nullstellen, deren reelle Teile größer als x sind, so gilt die Ungleichung

$$\frac{2q}{d_1} \geqq \frac{1}{D}, \quad \text{d. h.} \quad d_1 \leqq 2qD.$$

Der Kreis, der die Verbindungsstrecke der Punkte x und $x + 2qD$ zum Durchmesser hat, enthält also mindestens ein Paar nichtreeller Nullstellen von $F(z)$.

Man kann aus der Gleichung (25) eine Reihe von Sätzen ableiten[14]).

[14]) Vgl. die folgenden Arbeiten des Verfassers: „Über geometrische Relationen zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihrer Derivierten", Jahresbericht d. Deutsch. Math. Verein. Bd. 27 (1918), S. 44—48; „Über die Lage der Nullstellen der Derivierten eines Polynoms" (ungarisch), Mathematikai és Fizikai Lapok Bd. 38 (1931), S. 41—60; „Über die Lage der Nullstellen der Dervierten eines Polynoms", The Tohoku Math. Journal Bd. 35 (1932), S. 126—135 bzw. „Über einen Satz von Laguerre", Journal f. r. u. angew. Math. Bd. 169 (1933), S. 186 bis 192, wo $F(z)$ ein Polynom und x eine Nullstelle von $F'(z)$ bzw. ein beliebiger Punkt ist.

Es gilt z. B. der folgende Satz:

XXII. *Ist $f(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, das mindestens eine reelle Nullstelle hat, und hat die Ableitung $f'(z)$ eine reelle Nullstelle, die größer ist, als die größte reelle Nullstelle c von $f(z)$, so hat die Ableitung $f'(z)$ eine gerade Anzahl reeller Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$, für welche $c < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{2p}$ ist. Ist x ein beliebiger Punkt eines der abgeschlossenen Intervalle $(x_1, x_2), (x_3, x_4), \ldots, (x_{2p-1}, x_{2p})$ und hat das Polynom $f(z)$ höchstens $2q$ solche (nichtreelle) Nullstellen, deren reelle Teile größer als x sind, so enthält der Kreis, der die Verbindungsstrecke der Punkte x und $x + 2q\,(x - c)$ zum Durchmesser hat, mindestens zwei nichtreelle Nullstellen von $f(z)$. Gibt es keine Nullstelle von $f(z)$ im Innern dieses Kreises, so ist das Polynom $f(z)$ vom Grade $2q + 1$, hat eine Nullstelle im Punkte c und $2q$ Nullstellen am Rande des Kreises, und der Punkt x fällt mit einem der Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ zusammen.*

Der erste Teil dieses Satzes folgt aus dem zweiten Teile des Satzes VI.

Die Funktion $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ist in jedem Punkte x der reellen Achse, für den $x > x_{2p}$ ist, positiv. Daraus folgt, daß diese Funktion in jedem inneren Punkte der Intervalle (x_1, x_2), $(x_3, x_4), \ldots, (x_{2p-1}, x_{2p})$ negativ ist, weil das Polynom $f(z)$ im Intervalle $(c, +\infty)$ nicht verschwindet. Ist also x ein beliebiger Punkt dieser Intervalle, so sind $\frac{1}{d} \leqq 0$ und $\frac{1}{d_\delta} = 0$ in der Gleichung (25). Nach der Annahme gibt es in der Summe von (25) höchstens $2q$ positive Glieder. Diese positiven Glieder beziehen sich auf die $2q$ nichtreellen Nullstellen von $f(z)$, deren reelle Teile größer als x sind. Wir nehmen an, daß $\frac{1}{d_1}$ das größte dieser positiven Glieder ist.

Aus der Gleichung (25) folgt also die Ungleichung

$$\frac{2q}{d_1} \geqq \frac{1}{x - c} \quad \text{oder} \quad d_1 \leqq 2q\,(x - c),$$

da eines der negativen Glieder in der Summe von (25) $\frac{1}{c - x}$ ist.

Damit ist der Satz bewiesen.

Wendet man diesen Satz auf das Polynom $f(-z)$ an, so erhält man einen entsprechenden Satz, in dem die kleinste reelle Nullstelle des Polynoms $f(z)$ eine Rolle spielt.

Eingegangen 15. Januar 1933.

Über die nichtreellen Nullstellen von reellen ganzen Funktionen.

Von *Julius v. Sz. Nagy in* Szeged (Ungarn).

§ 1. Einleitung.

In einer vorigen Arbeit[1]) habe ich mich mit der Lage der nichtreellen Nullstellen der ganzen Funktionen vom Geschlecht 1*, d. h. der reellen ganzen Funktionen von der Form

$$F(z) = e^{-\gamma z^2} f(z)$$

beschäftigt, wo γ eine nichtnegative reelle Zahl und $f(z)$ ein Polynom oder eine ganze Funktion vom Geschlecht Null oder Eins ist.

Wir werden einige der dort erhaltenen Resultate für reelle ganze Funktionen von höherem Geschlecht verallgemeinern.

Eine ganze Funktion $F(z)$ wird im folgenden eine *ganze Funktion vom erhöhten Geschlecht* p oder *vom Geschlecht* p^* genannt, wenn sie sich in der Form

$$F(z) = e^{-\gamma z^{p+1}} f(z) \tag{1}$$

darstellen läßt, wo $f(z)$ eine reelle ganze Funktion ist, deren Geschlecht höchstens p ist, und γ eine nichtnegative reelle bzw. eine reelle Zahl bedeutet, je nachdem p eine ungerade bzw. eine gerade Zahl ist.

Die Gesamtheit der ganzen Funktionen vom Geschlecht p^* enthält die Polynome mit reellen Koeffizienten, die reellen ganzen Funktionen vom Geschlechte $0, 1, \ldots, p$ und auch die reellen ganzen Funktionen vom Geschlecht $p+1$, wenn sie die Form (1) haben.

Ist p *eine ungerade Zahl* und ist x ein solcher Punkt der reellen Achse, für den

$$F(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad H_p(x) = \frac{[F(x)]^{p+1}}{p!} \frac{d^{p+1} \log F(x)}{dx^{p+1}} = \frac{[F(x)]^{p+1}}{p!} \frac{d^p}{dx^p} \left[\frac{F'(x)}{F(x)}\right] \geqq 0 \tag{2}$$

sind, so werden wir den Punkt x *einen kritischen Punkt p-ter Art* und die Funktion $H_p(z)$ die *kritische Funktion p-ter Art* in bezug auf die ganze Funktion vom Geschlecht p^* nennen.

Die so definierte kritische Funktion erster Art ($p^* = 1$) stimmt mit der von uns definierten kritischen Funktion erster Ordnung[2]) überein. Die kritischen Funktionen dritter Ordnung und dritter Art, fünfter Ordnung und fünfter Art usw. weichen aber für eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* voneinander ab.

Jeder kritische Punkt p-ter Art bestimmt im allgemeinen einen endlichen Bereich, der mindestens ein Paar nichtreeller Nullstellen der ganzen Funktion vom Geschlecht

[1]) „Über die Lage der nichtreellen Nullstellen von reellen Polynomen und von gewissen reellen ganzen Funktionen", Journal f. r. u. angew. Mathematik Bd. 170 (1933), S. 133—147.

[2]) A. a. O.

p^* enthält Dieser Bereich ist von den $p+1$ Ovalen einer Sinusspirale vom Index $p+1$ begrenzt.

Man kann in gewissen Fällen durch den Wert $H_p(x)$ einen Bereich für die nichtreellen Nullstellen der ganzen Funktion $F(z)$ vom Geschlecht p^* auch dann bestimmen, wenn p eine gerade Zahl ist.

§ 2. Die kritischen Punkte und die Lage der nichtreellen Nullstellen.

1. Ist $F(z)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht p^*, so läßt sie sich in der Form

$$(3)\qquad F(z)=e^{-\gamma z^{p+1}}f(z)=e^{-\gamma z^{p+1}+g(z)}z^m\prod\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{\frac{z}{\alpha_k}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p!}\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)^p}$$

darstellen, wo $g(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist, dessen Grad höchstens p ist, und γ eine reelle und im Falle eines ungeraden p nichtnegative Zahl ist. Die Nullstellen α_k sind entweder reell oder paarweise konjugiert komplex.

Aus der Form (3) der Funktion $F(z)$ folgt die Gleichung

$$(4)\qquad H_p(z)=\frac{F^{p+1}(z)}{p!}\frac{d^{p+1}\log F(z)}{dz^{p+1}}=\frac{F^{p+1}(z)}{p!}\frac{d^p}{dz^p}\left[\frac{F'(z)}{F(z)}\right]$$
$$=F^{p+1}(z)\left[-(p+1)\gamma+(-1)^p\sum\frac{1}{(z-\alpha_k)^{p+1}}\right].$$

In der Summe kommt jede Nullstelle von $F(z)$ (auch die eventuelle m-fache Nullstelle $z=0$) so oft vor, wie ihre Multiplizität angibt.

Bezeichnen $c_1, c_2, \ldots$ die reellen, $a_1 \pm ib_1$, $a_2 \pm ib_2, \ldots$ die konjugiert komplexen Nullstellen von $F(z)$ (jede Nullstelle so oft gerechnet, wie ihre Multiplizität angibt) und faßt man die konjugiert komplexen Glieder in der Summe (4) zusammen, so ist

$$(5)\qquad H_p(z)=F^{p+1}(z)\left\{-(p+1)\gamma+(-1)^p\sum\frac{1}{(z-c_h)^{p+1}}\right.$$
$$\left.+(-1)^p\sum\left[\frac{1}{(z-a_k-ib_k)^{p+1}}+\frac{1}{(z-a_k+ib_k)^{p+1}}\right]\right.$$

Ist x ein kritischer Punkt p-ter Art, so ist p eine ungerade Zahl und

$$(6)\qquad F(x)\neq 0,\quad 0\leqq\frac{H_p(x)}{F^{p+1}(x)}=-(p+1)\gamma-\sum\frac{1}{(c_h-x)^{p+1}}$$
$$-\sum\left[\frac{1}{(a_k+ib_k-x)^{p+1}}+\frac{1}{(a_k-ib_k-x)^{p+1}}\right].$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$(7)\qquad \frac{H_p(x)}{F^{p+1}(x)}=\frac{1}{R^{p+1}},\quad (p+1)\gamma=\frac{1}{R_\gamma^{p+1}},\quad |c_h-x|=R_h\quad\text{und}\quad a_k+ib_k-x=r_k e^{i\varphi_k}$$

ein, so hat die Gleichung (6) die Form

$$(8)\qquad \frac{1}{R^{p+1}}+\frac{1}{R_\gamma^{p+1}}+\sum\frac{1}{R_h^{p+1}}=2\sum\frac{-\cos(p+1)\varphi_k}{r_k^{p+1}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß die Summe auf der rechten Seite entweder mindestens ein positives Glied enthalten muß, oder daß alle Glieder dieser Summe verschwinden müssen. Im letzten Falle müssen auch sämtliche Glieder der linken Seite der Gleichung verschwinden. Dies findet aber nur dann statt, wenn x eine Nullstelle der kritischen Funktion $H_p(z)$ ist und wenn die Funktion $F(z)$ keine reelle Nullstelle und höchstens das Geschlecht p hat.

Teilt man den vollen Winkel um den Punkt x durch $p+1$ Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_{p+1}$ in $2p+2$ gleiche Winkel, so daß die reelle Achse die Winkelhalbierende für zwei dieser Winkel ist, so verschwindet die Funktion $\cos(p+1)\varphi$ auf den $p+1$ Geraden g_k. Der Wert von $\cos(p+1)\varphi$ ist positiv bzw. negativ im Innern von $p+1$ nicht benachbarten Winkelräumen, und zwar positiv in denjenigen $p+1$ Winkelräumen, zu denen auch die von der reellen Achse halbierten zwei Winkelräume gehören. Diese $p+1$ Winkelräume werden im folgenden kurz mit $RW_x(p+1)$, die übrigen $p+1$ Winkelräume mit $W_x(p+1)$ bezeichnet.

Nach diesen Bezeichnungsfestsetzungen können wir den folgenden Satz aussprechen:

I. *Ist x ein beliebiger kritischer Punkt p-ter Art in bezug auf eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht p^*, so enthalten die $p+1$ Winkelräume von $W_x(p+1)$ mindestens zwei nichtreelle Nullstellen von $F(z)$. Das Innere der Winkelräume $W_x(p+1)$ enthält nur dann keine Nullstelle von $F(z)$, wenn die Nullstellen von $F(z)$ alle auf den Randgeraden von $W_x(p+1)$ liegen. In diesem Falle muß x eine Nullstelle der kritischen Funktion $H_p(z)$ sein, und das Geschlecht von $F(z)$ kann höchstens p sein.*

Aus diesem Satze folgt der folgende:

II. *Ist x ein beliebiger kritischer Punkt p-ter Art in bezug auf eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht p^* und sind g_1 und g_2 solche Geraden durch den Punkt x, die mit der reellen Achse den Winkel $\frac{\pi}{2p+2}$ bzw. $-\frac{\pi}{2p+2}$ bilden, so enthält der von g_1 und g_2 gebildete Winkelraum von der Öffnung $\frac{p}{p+1}\pi$ stets nichtreelle Nullstellen von $F(z)$.*

Aus diesem Satz folgt der folgende:

III. *Ist p eine ungerade Zahl und konstruiert man zu jedem konjugiert komplexen Nullstellenpaar einer ganzen Funktion vom Geschlecht p^* den Rhombus, der die Verbindungsstrecke der zwei Nullstellen des Paares zur Diagonale hat und in den Endpunkten dieser Diagonale den Winkel $\frac{p}{p+1}\pi$ hat, so liegt jeder kritische Punkt p-ter Art für die Funktion $F(z)$ in den Ecken oder im Innern mindestens eines dieser Rhomben.*

2. Die Gleichungen

$$\varrho^k = a^k \cos k\varphi \quad \text{und} \quad \varrho^k = -a^k \cos k\varphi \qquad (a>0) \tag{9}$$

stellen in Polarkoordinaten je eine Sinusspirale vom Index k dar, deren Mittelpunkt der Pol $\varrho = 0$ ist. Diese Sinusspiralen bestehen im Falle, daß k eine ganze positive Zahl ist, aus k Ovalen, die im Mittelpunkt miteinander zusammenhängen. Der maximale Abstand der Punkte der Sinusspiralen (9) vom Mittelpunkt gemessen ist a. Dieser Abstand wird im folgenden der Halbmesser der Sinusspiralen genannt.

Ist $k = p+1$ eine ganze positive Zahl, so liegen die $p+1$ Ovale der ersten bzw. zweiten Sinusspirale (9) in den Winkelräumen $RW_x(p+1)$ bzw. $W_x(p+1)$.

Eine Sinusspirale vom geraden Index $p+1$, deren Mittelpunkt x auf der reellen Achse liegt, sowie deren Ovale in den Winkelräumen $W_x(p+1)$ liegen, und die den Halbmesser a hat, wird mit $S_{p+1}(x; a)$ bezeichnet. Der Bereich $S_{p+1}(x; a)$ wird von den Randpunkten und von den inneren Punkten der Ovale der Sinusspirale $S_{p+1}(x; a)$ gebildet.

Ist x ein beliebiger kritischer Punkt p-ter Art in bezug auf die ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht p^*, liegen ferner höchstens $2q$ Nullstellen von $F(z)$ in den Winkelräumen $W_x(p+1)$, und hat endlich das erste Glied der Summe auf der rechten Seite von (8) den größten (positiven) Wert, so kann man aus (8) die folgenden Ungleichungen ableiten:

$$(10)\quad \frac{1}{R^{p+1}} + \frac{1}{R_\nu^{p+1}} + \sum \frac{1}{R_h^{p+1}} \leqq \frac{-2q\cos(p+1)\varphi_1}{r_1^{p+1}};$$

$$(11)\quad r_1^{p+1} \leqq -2q\,R^{p+1}\cos(p+1)\varphi_1;$$

$$(12)\quad r_1^{p+1} \leqq -2q\,R_\nu^{p+1}\cos(p+1)\varphi_1 = \frac{-2q}{(p+1)\gamma}\cos(p+1)\varphi_1;$$

$$(13)\quad r_1^{p+1} \leqq -2q\,R_1^{p+1}\cos(p+1)\varphi_1, \quad \text{wenn} \quad h \geqq 1 \text{ ist};$$

$$(14)\quad r_1^{p+1} \leqq \frac{-2q}{s}\,d^{p+1}\cos(p+1)\varphi_1,$$

wenn die rechte Seite der Gleichung (8) mindestens s solche Glieder hat, die nicht kleiner als $\frac{1}{d^{p+1}}$ sind.

Auf Grund der Ungleichung (11) gilt der Satz:

IV. *Ist x ein beliebiger kritischer Punkt p-ter Art in bezug auf eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht p^*, für den $H_p(x) \neq 0$ ist, und hat die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ (nichtreelle) Nullstellen in den Winkelräumen $W_x(p+1)$, so enthält der Sinusspiralenbereich $S_{p+1}\left(x; \sqrt[p+1]{2q}\frac{F(x)}{\sqrt[p+1]{H_p(x)}}\right)$ mindestens zwei Nullstellen von $F(z)$. Im Inneren dieses Bereiches liegt nur dann keine Nullstelle von $F(z)$, wenn die Funktion $F(z)$ höchstens das Geschlecht p hat und wenn sie $2q$ Nullstellen auf der Sinusspirale und die übrigen Nullstellen alle auf den Tangenten des $p+1$-fachen Punktes der Sinusspirale hat.*

Aus der Ungleichung (12) folgt der folgende Satz:

V. *Es sei $F(z)$ eine reelle ganze Funktion vom Geschlecht $p+1$ von der Form $F(z) = e^{-\gamma z^{p+1}} f(z)$, wo γ eine positive, p eine ganze positive ungerade Zahl und $f(z)$ ein Polynom oder eine ganze Funktion ist, die höchstens das Geschlecht p hat. Ist x ein beliebiger kritischer Punkt p-ter Art in bezug auf $F(z)$ und hat die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ Nullstellen in den Winkelräumen $W_x(p+1)$, so liegen mindestens zwei Nullstellen von $F(z)$ im Sinusspiralenbereich $S_{p+1}\left(x; \sqrt[p+1]{\frac{2q}{(p+1)\gamma}}\right)$. Das Innere dieses Bereiches enthält nur dann keine Nullstelle von $F(z)$, wenn die Funktion $F(z)$ $2q$ Nullstellen auf der Sinusspirale und ihre übrigen Nullstellen auf den Randgeraden von $W_x(p+1)$ hat und wenn der Punkt x eine Nullstelle der Funktion $H_p(z)$ ist.*

Aus der Ungleichung (13) folgt der Satz:

VI. *Ist x ein kritischer Punkt p-ter Art in bezug auf eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht p^* und hat diese Funktion höchstens $2q$ Nullstellen in den Winkelräumen $W_x(p+1)$ und mindestens eine reelle Nullstelle, deren Abstand vom Punkte x nicht größer als R ist, so enthält der Sinusspiralenbereich $S_{p+1}(x; R\sqrt[p+1]{2q})$ mindestens zwei Nullstellen von $F(z)$. Das Innere dieses Bereiches enthält nur dann keine Nullstelle von $F(z)$ wenn die Funktion $F(z)$ höchstens das Geschlecht p hat, wenn sie ferner eine Nullstelle auf der reellen Achse im Abstande R vom Punkte x, $2q$ Nullstellen auf der Sinusspirale und die übrigen Nullstellen alle auf den Randgeraden von $W_x(p+1)$ hat und wenn der Punkt x eine Nullstelle der kritischen Funktion $H_p(z)$ ist.*

Die Ungleichung (14) läßt sich auf folgende Weise ausdrücken:

VII. *Ist x ein kritischer Punkt p-ter Art in bezug auf eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht p^* und hat diese Funktion höchstens $2q$ Nullstellen in den Winkelräumen $W_x(p+1)$ und mindestens s solche reellen Nullstellen, deren Abstände von x nicht größer*

als d sind, so enthält der Sinusspiralenbereich $S_{p+1}\left(x;\ d\sqrt[p+1]{\frac{2q}{s}}\right)$ *mindestens zwei Nullstellen von* $F(z)$. *Das Innere dieses Bereiches enthält nur dann keine Nullstelle von* $F(z)$, *wenn* a) *das Geschlecht von* $F(z)$ *höchstens* p *ist*, b) x *eine Nullstelle der kritischen Funktion* $H_p(z)$ *ist*, c) *die Funktion* $F(z)$ *nur* p *reelle Nullstellen hat, die in den von* x *im Abstande* d *liegenden zwei Punkten der reellen Achse zusammenfallen*, d) $2q$ *weitere Nullstellen von* $F(z)$ *auf der Sinusspirale und die übrigen alle auf den Randgeraden von* $W_x\,(p+1)$ *liegen.*

3. Diese Sätze lassen sich auch im Falle anwenden, daß $F(z)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht 1* ist. Ist z. B. $F(z)$ eine reelle ganze Funktion, die höchstens das Geschlecht 1 hat, ist ferner x eine Nullstelle der kritischen Funktion erster Ordnung oder erster Art in bezug auf die Funktion $F(z)$ und kennt man keine reelle Nullstelle von $F(z)$, so kann man keinen von einer Bernoullischen Lemniskate mit dem Mittelpunkte x begrenzten Bereich bestimmen, der mindestens ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar von $F(z)$ enthält. Dann rechnen wir im Punkte x die Werte der Funktionen $H_3(x), H_5(x), \ldots$ 3-ter, 5-ter, ... Art aus. Ist einer dieser Werte positiv, so kann man auf Grund der Sätze IV—VII einen endlichen Bereich bestimmen, der nichtreelle Nullstellen von $F(z)$ enthält.

§ 3. Weitere Sätze über die Lage der Nullstellen reeller ganzer Funktionen.

Ist $F(z)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht p^*, so besteht die Gleichung (5) auch im Falle, daß p eine gerade Zahl ist.

Führt man die Bezeichnungen

$$(15)\quad R^{p+1} = \frac{F^{p+1}(x)}{H_p(x)},\quad R_\gamma^{p+1} = \frac{1}{(p+1)\,\gamma},\quad R_h = c_h - x \text{ und } a_k + ib_k - x = r_k e^{i\varphi_k}$$

ein, so erhält man auch in diesem Falle die Gleichung

$$(16)\qquad \frac{1}{R^{p+1}} + \frac{1}{R_\gamma^{p+1}} + \sum \frac{1}{R_h^{p+1}} = -\,2\sum \frac{\cos(p+1)\varphi_k}{r_k^{p+1}}.$$

Der wesentliche Unterschied gegen den Fall ungerader p liegt darin, daß die Summe auf der linken Seite von (16) positive wie negative Glieder enthalten kann (je nachdem die betreffenden reellen Nullstellen von $F(z)$ rechts bzw. links vom Punkte x liegen).

Teilt man den vollen Winkel um den Punkt x durch $p+1$ Geraden in $2p+2$ gleiche Winkel, so daß die reelle Achse die Winkelhalbierende für zwei dieser Winkel ist, so verschwindet die Funktion $\cos(p+1)\varphi$ nur auf den $p+1$ Geraden. Die Werte dieser Funktion haben aber jetzt in je zwei Scheitelwinkelräumen der $2p+2$ Winkel entgegengesetzte Vorzeichen. Die $p+1$ nicht benachbarten Winkelräume von der Öffnung $\frac{\pi}{p+1}$, in denen die Funktion $\cos(p+1)\varphi$ positive bzw. negative Werte annimmt, werden im folgenden mit $W_{x+}(p+1)$ bzw. $W_{x-}(p+1)$ bezeichnet. Die Gleichungen (9) stellen auch im Falle ungerader $k = p+1$ je eine Sinusspirale dar, die in den Winkelräumen $W_{x+}(p+1)$ bzw. $W_{x-}(p+1)$ liegt. Diese Sinusspiralen werden mit $S_{p+1}(x; +a)$ bzw. mit $S_{p+1}(x; -a)$ bezeichnet.

Hat die linke Seite der Gleichung (16) einen positiven bzw. einen negativen Wert, so können wir behaupten, daß die Funktion $F(z)$ in den Winkelräumen $W_{x-}(p+1)$ bzw. $W_{x+}(p+1)$ mindestens zwei nichtreelle Nullstellen hat. Kennt man auch den Wert der linken Seite der Gleichung (16) und die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $F(z)$ in den Winkelräumen $W_{-x}(p+1)$ bzw. $W_{x+}(p+1)$, je nachdem der Wert der linken Seite von (16) positiv bzw. negativ ist, so kann einen endlichen Bereich bestimmen, der

mindestens zwei Nullstellen von $F(z)$ enthält. Dieser Bereich ist von einer Sinusspirale vom Index $p+1$ begrenzt.

Somit gilt der Satz:

VIII. *Es sei $F(z)$ eine reelle ganze Funktion von der Form*

$$F(z) = e^{\delta z^{p+1}} f(z),$$

wo p eine positive gerade Zahl, δ eine nichtnegative Zahl und $F(z)$ eine ganze Funktion höchstens vom Geschlecht p ist, und es sei

$$H_p(z) = \frac{F^{p+1}(z)}{p!} \frac{d^{p+1} \log F(z)}{dz^{p+1}}.$$

Ist x eine reelle Zahl, für die $F(x) \neq 0$ und $F(x) H_p(x) \leqq 0$ sind, sind ferner die reellen Nullstellen von $F(z)$ alle kleiner als x und hat endlich die Funktion $F(z)$ in den Winkelräumen $W_{x+}(p+1)$ höchstens $2q$ Nullstellen, so liegen mindestens zwei nichtreelle Nullstellen von $F(z)$ in jedem der beiden Sinusspiralenbereiche $S_{p+1}\left(x; \sqrt[p+1]{\frac{-2q}{H_p(x)}} F(x)\right)$ und $S_{p+1}\left(x; \sqrt[p+1]{\frac{2q}{(p+1)\delta}}\right)$. Das Innere dieser Bereiche enthält nur dann keine nichtreelle Nullstelle von $F(z)$, wenn die Funktion $F(z)$ auf der reellen Achse keine Nullstelle, auf der betreffenden Sinusspirale $2q$ und auf den Randgeraden von $W_{x+}(p+1)$ die übrigen Nullstellen hat und wenn außerdem im ersten Falle $H_p(x) \neq 0$ und $\delta = 0$ und im zweiten Falle $H_p(x) = 0$ und $\delta > 0$ sind.

In beiden Fällen ist nämlich kein Glied der linken Seite von (16) positiv, und die Summe der rechten Seite hat höchstens $2q$ positive Glieder. Ist $\frac{\cos(p+1)\varphi_1}{r_1^{p+1}}$ das größte positive Glied in der Summe auf der rechten Seite von (16), so bestehen die Ungleichungen

$$\frac{2q\cos(p+1)\varphi_1}{r_1^{p+1}} \geqq -\frac{1}{R^{p+1}} = -\frac{H_p(x)}{F^{p+1}(x)}, \quad \text{oder} \quad r_1^{p+1} \leqq -2q \frac{F^{p+1}(x)}{H_p(x)} \cos(p+1)\varphi_1,$$

$$\frac{2q\cos(p+1)\varphi_1}{r_1^{p+1}} \geqq -\frac{1}{R_\delta^{p+1}} = (p+1)\delta, \quad \text{oder} \quad r_1^{p+1} \leqq \frac{2q}{(p+1)\delta} \cos(p+1)\varphi_1.$$

Damit ist der Satz VIII bewiesen.

Auch der folgende Satz läßt sich auf Grund der Gleichung (16) leicht beweisen:

IX. *Es sei $F(z)$ eine reelle ganze Funktion höchstens vom Geschlecht p, wo p eine gerade Zahl ist. Ist x eine reelle Zahl, für die $F(x) \neq 0$ und $F(x) H_p(x) \leqq 0$ sind, sind ferner die reellen Nullstellen von $F(z)$ alle kleiner als x und hat die Funktion $F(z)$ in den Winkelräumen $W_{x+}(p+1)$ höchstens $2q$ Nullstellen und auf der reellen Achse mindestens s solche Nullstellen, deren Abstand vom Punkte x nicht größer als d ist, so hat die Funktion im Sinusspiralenbereich $S_{p+1}\left(x; \sqrt[p+1]{\frac{2q}{s}}\, d\right)$ stets nichtreelle Nullstellen. Das Innere dieses Bereiches enthält nur dann keine Nullstelle von $F(z)$, wenn $H_p(x) = 0$ ist und wenn die Funktion im Punkte $x - d$ eine s-fache Nullstelle, auf der Sinusspirale $2q$ Nullstellen und auf den Randgeraden von $W_{x+}(p+1)$ die übrigen Nullstellen hat.*

Entsprechende Sätze lassen sich auch dann aussprechen, wenn die reellen Nullstellen von $F(z)$ alle größer als x sind.

Eingegangen 15. Januar 1933.

Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung.

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

Einleitung.

1. Wir erläutern unsere Fragestellung zunächst an dem entsprechenden, naturgemäß einfacheren Falle in der *projektiven Ebene.* Wir betrachten also die *Bogen* von zweiter Realitätsordnung, oder — kürzer — von „*zweiter Ordnung*", d. h. diejenigen ebenen Bogen, welche keine Teilstrecken enthalten und mit jeder Geraden maximal zwei Punkte gemeinsam haben. Jeder Bogen zweiter Ordnung ist projektiv äquivalent mit einem *beschränkten* Bogen zweiter Ordnung [1]). Die Gestalt der letzteren ist aber bekannt: sie sind identisch mit den gewöhnlichen Konvexbogen. (Letztere sind hier etwa zu definieren als beschränkte Bogen ohne Teilstrecken, welche ganz der Begrenzung ihrer konvexen Hülle angehören.)

Anschaulich einleuchtend ist nun, daß *jeder beschränkte Bogen* $\mathfrak{B}$ *von zweiter Ordnung* „*ordnungsinvariant erweitert*" *werden kann*, d. h. daß sich ein Bogen zweiter Ordnung $\mathfrak{B}^+$ angeben läßt, welcher den Bogen $\mathfrak{B}$ ganz in seinem Innern enthält. Eine *Ausnahme, von der hier stets abgesehen wird*, macht lediglich der Fall, daß die Tangente in einem der Endpunkte von $\mathfrak{B}$ den anderen Endpunkt von $\mathfrak{B}$ enthält [2]). *Unter den ordnungsinvarianten Erweiterungen* $\mathfrak{B}^+$ *von* $\mathfrak{B}$ *gibt es insbesondere immer geschlossene Kurven* [3]).

2. Die entsprechende Frage für den Fall des *dreidimensionalen projektiven* Raumes ergibt sich sogleich aus der Bemerkung, daß die Ordnung zwei in der Ebene die niedrigste nicht triviale Ordnung ist. Wir haben also im Raume die *Bogen* „*dritter Ordnung*" zu betrachten, d. h. diejenigen Bogen, welche *keine ebenen Teilbogen enthalten* und mit jeder Ebene maximal drei Punkte gemeinsam haben. Und wir werden zu fragen haben, ob ein *beliebig vorgegebener Bogen dritter Ordnung sich stets ordnungsinvariant erweitern läßt*, insbesondere zu einer geschlossenen Kurve. Herr Juel, auf den diese Frage zurückgeht, hat bereits angegeben [4]), daß die gewünschte Erweiterung immer möglich ist, falls die

---

[1]) Vgl. Nr. 1, 13 der vorliegenden Arbeit, woselbst ein Beweis für die entsprechende — bereits von Herrn Juel [4]), a. a. O. gelegentlich konstatierte — Eigenschaft der Raumbogen dritter Ordnung skizziert ist.

[2]) A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta math. **55** (1930), Seite 86, Fußnote 1. Dann wäre nämlich eine ordnungsfeste Erweiterung nur durch Hinzufügung von Strecken möglich, während doch der Bogen keine Teilstrecken enthalten soll.

[3]) Für ebene Bogen k-ter Ordnung ($k \geqq 2$) lassen sich Beispiele von nicht ordnungsinvariant (ordnungsfest) erweiterbaren Bogen angeben. (Vgl. für $k = 2$ Fußnote [2]); für $k = 3$ Marchaud [2]), a. a. O., Seite 88/89.) Eine Behandlung des Problems der ordnungsfesten Erweiterung beliebig vorgelegter Bogen, mit Angabe notwendiger und hinreichender Bedingungen für ordnungsfeste Erweiterbarkeit, wird an anderer Stelle gegeben werden.

[4]) C. Juel, Beispiele von Elementarkurven und Elementarflächen, Atti del congr. intern. dei mat., Bologna 1928, Bd. IV, Seite 198. — Nach brieflicher Mitteilung von Herrn Juel stimmt übrigens die von uns gefundene, in Nr. 2, 5 vorliegender Arbeit beschriebene Konstruktion der Erweiterungskurve dritter Ordnung mit derjenigen überein,

Schmiegebene im einen Endpunkt des vorgelegten Bogens den anderen Endpunkt nicht enthält und falls die Tangenten in den beiden Endpunkten einander nicht schneiden; dabei wird angenommen, daß alle betrachteten Bogen stetige Tangente und Schmiegebene besitzen. Ein Beweis dieses Satzes ist bisher nicht veröffentlicht worden. Er soll im folgenden gegeben werden. Dabei wird sich zeigen, daß die Gültigkeit des Satzes an *keinerlei Differenzierbarkeitsbedingungen* (Existenz und Stetigkeit der Tangente, usw.) gebunden ist.

3. Da die Erledigung der einzelnen Beweisschritte mancherlei Überlegungen erfordert, durch welche der eigentliche *Beweisgedanke* unterbrochen und damit etwas verdeckt wird, so mag dieser schon hier skizziert werden; und zwar soll er, der größeren Einfachheit wegen, ebenfalls *am Beispiel der ebenen Bogen zweiter Ordnung erläutert* werden. Um die ordnungsinvarianten Erweiterungen eines solchen Bogens $\mathfrak{C}$ zu untersuchen, genügt es offenbar, im einen Endpunkte F von $\mathfrak{C}$ einen neuen Bogen $\mathfrak{D}$ von zweiter Ordnung an $\mathfrak{C}$ anzufügen und Kriterien aufzustellen dafür, daß die Summe $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} + \mathfrak{D}$ wieder ein Bogen oder eine Kurve zweiter Ordnung ist. Entscheidend für unseren Beweis ist nun die Bemerkung, daß sich ein Kriterium finden läßt, welches im wesentlichen nur eine Forderung „im Kleinen" enthält. Verlangt man nämlich, daß die Tangenten im Anfangs- und Endpunkte von $\mathfrak{B}$ keinen weiteren Punkt von $\mathfrak{B}$ enthalten, so zeigt sich: Der ganze Bogen $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann von zweiter Ordnung, wenn F ein Punkt zweiter Ordnung auf $\mathfrak{B}$ ist, d. h. wenn nur jede beliebig kleine zweiseitige Umgebung des „Ansatzpunktes" F auf $\mathfrak{B}$ von zweiter Ordnung ist. Fügt man speziell $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ in F so zusammen, daß $\mathfrak{B}$ in F eine (eindeutig bestimmte) Tangente, aber keine Spitze hat, so ist F dann und nur dann von zweiter Ordnung, wenn kein Wendepunkt vorliegt, d. h. wenn jede Sekante durch F mit $\mathfrak{B}$ höchstens einen, zu F hinreichend benachbarten Punkt gemeinsam hat. Diese letztere Forderung läßt sich aber ersichtlich stets erfüllen, eben weil es sich um eine Eigenschaft im kleinen handelt. Man erkennt auf Grund des eben erwähnten Kriteriums auch leicht, daß ein *Bogen* zweiter Ordnung einfach dadurch zu einer *Kurve* zweiter Ordnung erweitert werden kann, daß man ihn projektiv an der Verbindungsgeraden seiner beiden Endpunkte spiegelt und dabei als Zentrum der Spiegelung den Schnittpunkt der Tangenten in den beiden Endpunkten wählt.

Ganz entsprechend verläuft die Behandlung der ordnungsinvarianten Erweiterungen eines Raumbogens dritter Ordnung. Und wie für die ebenen Bogen zweiter Ordnung das oben angegebene Kriterium eine einfache Eigenschaft des lokalen Verlaufes unserer Bogen als für sie charakteristisch zum Ausdruck brachte, so auch im Falle der Raumbogen dritter Ordnung: Hier konstatiert das Kriterium im Grunde nur eine, anschaulich einleuchtende, lokale Windungseigenschaft als charakteristisch für Bogen dritter Ordnung (mit eindeutiger Tangente und Schmiegebene) (vgl. Nr. 2, 4).

4. Die nachstehende Behandlung unseres Erweiterungsproblems für den Fall der Bogen dritter Ordnung im Raume erhebt übrigens nicht den Anspruch, auf kürzestem Wege vorzugehen. Vielmehr wurde gleichzeitig die Vorbereitung von Verallgemeinerungen dieses Erweiterungssatzes angestrebt, nämlich: *Erstens* auf den Fall gewisser ebener Bogen einer $\mathfrak{R}_3$-Ordnung Drei, wobei also die Ordnungsdefinition bezogen ist auf ein System ebener Kurven, deren jede durch drei verschiedene, in gewissem Umfange willkürliche, Punkte eindeutig bestimmt ist [5]); für diesen Fall, wie auch für Kurven dritter Ordnung

welche bereits Herr Juel für die ordnungsinvariante Erweiterung eines Raumbogens dritter Ordnung zu einer Raumkurve benutzt hat.

[5]) Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen, Monatshefte f. Math. u. Physik 40 (1933), Nr. 2, 1.

im R_3, lassen sich übrigens noch weitergehende Aussagen machen, als in Nr. 2, 1—2, 4. *Zweitens* auf die *Bogen n-ter Ordnung im n-dimensionalen Raume* und weiterhin auf ebene Bogen einer $\mathfrak{R}_k$-Ordnung k. Doch sollen nähere Ausführungen über diese vermuteten Verallgemeinerungen späterer Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Davon abgesehen dürfte die vorliegende Untersuchung auch einen Beitrag liefern zur Kenntnis des *Verlaufes der Bogen und Kurven dritter Ordnung im Raume, und zwar des Verlaufes sowohl im Kleinen als im Großen.*

Zusatz bei der Korrektur.

Wie inzwischen Fräulein Sauter gezeigt hat und, in Fortsetzung vorliegender Arbeit, unter anderem darlegen wird, ist die oben vermutungsweise ausgesprochene Verallgemeinerung des Erweiterungssatzes auf den R_n in der Tat richtig (für alle $n \geqq 4$). Ein Beweis für $n \geqq 4$ läßt sich im wesentlichen durch Übertragung des oben für $n = 3$ gegebenen führen; ebenso eine Konstruktion. In diesem Zusammenhange sei ferner bemerkt, daß unser in Nr. 2, 3 angegebenes Kriterium sich auch auf Fälle ausdehnen läßt, in welchen die Halbtangenten im Ansatzpunkte F nicht in die gleiche Gerade fallen, in welchen also dort beim Ansetzen eine Ecke entsteht; entsprechendes gilt für die Schmieghalbebenen.

§ 1. Eigenschaften der Bogen dritter Ordnung im R_3.

1, 1. Im gegenwärtigen Paragraphen *bezeichne* $\mathfrak{B}$, *soweit nicht ausdrücklich anderes bemerkt ist, stets einen Bogen dritter Ordnung* im projektiven dreidimensionalen Raume R_3; dabei *soll* $\mathfrak{B}$ *keinen ebenen Teilbogen enthalten.* („Bogen" = eindeutiges, stetiges Streckenbild, wobei die Bilder der Streckenendpunkte *verschiedene* Punkte des R_3 sind; „Kurve" = eindeutiges, stetiges Kreisbild) „Ordnung von $\mathfrak{B}$" = „Realitätsordnung von $\mathfrak{B}$" = maximale Anzahl von Stellen, welche $\mathfrak{B}$ mit einer Ebene des R_3 gemeinsam hat. Entsprechend wird die „Ordnung" einer Kurve und eines Bogens in der Ebene, d. h. im projektiven R_2, definiert. Einer Erklärung bedarf schließlich der Begriff der „Stetigkeit" der Abbildung oder der „Konvergenz einer Folge von Punkten Q_ν" im projektiven Raume gegen einen Punkt Q, in Zeichen: $Q = \lim_{\nu\to\infty} Q_\nu$ oder kürzer: $Q_\nu \to Q$. Sie gründet sich in bekannter Weise auf die Definition der Umgebung $\mathfrak{U}$ irgendeines Punktes P als des projektiven Bildes einer Umgebung $\overline{\mathfrak{U}}$ eines im Endlichen gelegenen Urbildpunktes T, eine Definition, vermöge deren der projektive Raum kompakt wird [6]).

1, 2. Drei verschiedene Punkte eines Bogens dritter Ordnung liegen niemals auf einer Geraden.

1, 3. Ein Bogen $\mathfrak{B}$ von dritter Ordnung besitzt keinen mehrfachen Punkt, d. h. $\mathfrak{B}$ ist ein-eindeutiges Streckenbild [7]).

1, 4. Hat eine Ebene $\mathfrak{E}$ drei verschiedene Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam, so sind die *inneren* unter diesen stets *Schnitt*punkte [8]). („innerer Punkt von $\mathfrak{B}$" = Bild eines inneren Punktes der Urbildstrecke; „Schnittpunkt auf $\mathfrak{E}$" = innerer Punkt von $\mathfrak{B}$, dessen Umgebung Punkte auf verschiedenen Seiten der betrachteten Ebene enthält.) Zu jeder Ebene, welche drei Punkte von $\mathfrak{B}$ enthält, gibt es beliebig benachbarte Ebenen mit drei inneren Punkten von $\mathfrak{B}$ [9]).

---

[6]) Vgl. A. Marchaud, Sur diverses extensions de la notion de continu d'ordre borné, Ann. sci. de l'école normale sup. (3) **49** (1932), Seite 119.

[7]) Vgl. Marchaud [2]), a. a. O., Seite 99. Wir können also statt „Stelle" im folgenden immer „Punkt" sagen.

[8]) Über Kontinua von beschränkter Ordnung, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., 1931, Seite 54.

[9]) Vgl. Marchaud [2]), a. a. O., Seite 79.

1, 5. Wir denken uns $\mathfrak{B}$ „*orientiert*", d. h. mit einem Durchlaufungssinn versehen, indem wir unter Zugrundelegung einer bestimmten Darstellung: $\varrho x_j = \xi_j(t)$, $j = 1, \ldots, 4$, von $\mathfrak{B}$ als Bild der Einheitsstrecke $0 \leqq t \leqq 1$ die Orientierung dieser letzteren auf $\mathfrak{B}$ übertragen. Sind dann Q_1 und Q_2 zwei Punkte von $\mathfrak{B}$, deren zugehörige Urbilder den Parameterwerten t_1 und t_2 entsprechen, und ist $t_1 < t_2$, so sagen wir: Q_1 liege „*unterhalb*" oder „*links*" oder „*auf der linken Seite*" von Q_2 oder „*hinter*" Q_2; und andererseits: Q_2 liege „*oberhalb*" oder „*rechts*" von Q_1 oder „*vor*" Q_1. Die Bilder von $t = 0$ und $t = 1$ heißen „*Anfangs-*" und „*Endpunkt*" von $\mathfrak{B}$.

1, 6. Wir erklären, wie üblich, eine Gerade g bzw. eine Ebene $\mathfrak{E}$ als *Limes einer Folge von Geraden g_ν bzw. von Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$*, wenn irgend zwei verschiedene Punkte von g, bzw. irgend drei nicht kollineare Punkte von $\mathfrak{E}$, Limiten von geeignet gewählten Punkten der g_ν bzw. der $\mathfrak{E}_\nu$ sind; in *Zeichen*: $g = \lim_{\nu \to \infty} g_\nu$ oder kürzer: $g_\nu \to g$ usw. Entsprechend ist die Bezeichnung einer *Halbgeraden* oder einer *Halbebene* als Limes einer Folge von *Halb*geraden oder *Halb*ebenen zu verstehen. (Die Trägergerade und der Anfangspunkt der Halbgeraden sind dabei als eigentlich angenommen. Entsprechend für die Halbebene.)

Nunmehr können wir als „*vordere Halbtangente*" in einem Punkte Q von $\mathfrak{B}$ erklären den gemeinsamen Limes aller Folgen von Halbgeraden h_ν mit Q als Anfangspunkt, welche außerdem je einen *vor* Q gelegenen Punkt Q_ν von $\mathfrak{B}$ enthalten und wobei $Q_\nu \to Q$; dabei darf Q natürlich nicht Endpunkt von $\mathfrak{B}$ sein. Als „*hintere Halbtangente*" in Q dagegen erklären wir den gemeinsamen Limes aller Folgen von Halbgeraden mit Q als Anfangspunkt, *auf deren Verlängerung* ein *hinter* Q befindlicher Punkt Q_ν^* von $\mathfrak{B}$ liegt und wobei $Q_\nu^* \to Q$; dabei darf Q dann nicht Anfangspunkt von $\mathfrak{B}$ sein.

In jedem inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ existiert die vordere *und* die hintere Halbtangente, im Anfangspunkt nur die vordere, im Endpunkt nur die hintere [10]). Die Trägergerade der vorderen bzw. hinteren Halbtangente heiße kurz „*vordere*" bzw. „*hintere Tangente*".

Sind vordere und hintere Halbtangente im inneren Punkt Q identisch, so heißt Q „*differenzierbar*", die Trägergerade der Halbtangenten heißt dann kurz „*Tangente*". Die Punkte von $\mathfrak{B}$ sind — bis auf höchstens abzählbar viele Ausnahmen — differenzierbar [10]).

Ferner versteht man z. B. unter einer „*vorderen Tangentialschmieghalbebene in Q an $\mathfrak{B}$*" den Limes aller Halbebenen, welche durch den Träger der vorderen Halbtangente begrenzt werden und in ihrem Innern einen vor Q gelegenen Punkt Q_ν von $\mathfrak{B}$ enthalten mit $Q_\nu \to Q$. In jedem inneren Punkte Q von $\mathfrak{B}$ existiert sowohl die vordere als die hintere Tangentialschmiegebene, *abgekürzt*: „*v.* (bzw. *h.*) *T.S.H.-E.*" [11]). Die zugehörigen Trägerebenen heißen kurz „*vordere*" bzw. „*hintere Tangentialschmiegebene*", *abgekürzt*: „*T.S.-E.*"

1, 7. Projizieren wir $\mathfrak{B}$ z. B. vom Anfangspunkt A oder von einem inneren differenzierbaren Punkte Z von $\mathfrak{B}$ aus zentral auf eine Ebene $\mathfrak{E}$, welche A bzw. Z nicht enthält, und erklären wir als Bild von A bzw. Z selbst den Schnittpunkt $\bar{A}$ bzw. $\bar{Z}$ der Tangente in A mit $\mathfrak{E}$, so ist, wie sogleich zu zeigen, *die durch die Projektion vermittelte Abbildung von $\mathfrak{B}$ ein-eindeutig*, abgesehen vom Falle, daß A Projektionszentrum ist und daß die Tangente in A zugleich auch den Endpunkt E von $\mathfrak{B}$ enthält. (Im letzteren Falle, den wir übrigens als unzulässig erkennen werden, vgl. Nr. 2, 5, wäre das Bild $\bar{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ eine geschlossene Kurve und die Abbildung würde ebenfalls ein-eindeutig, wenn wir A

[10]) A. Rosenthal, Über Kontinua von endlicher Ordnung, Crelles Journal **167** (1932), Seite 273; Marchaud [2]), a. a. O., Seite 83—84.

[11]) Vgl. Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung, Math. Ann. 108 (1933), Nr. 1, 3.

und E miteinander identifizieren.) *Das Bild* $\overline{\mathfrak{B}}$ *von* $\mathfrak{B}$ *ist von zweiter Ordnung in der Projektionsebene* $\mathfrak{E}$. In der Tat [12]): Wir verabreden, daß jedem Punkte des Bildes $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ als Vielfachheit die Anzahl derjenigen verschiedenen Punkte von $\mathfrak{B}$ zugeschrieben werde, die auf der zugehörigen Projektionsgeraden liegen; das Projektionszentrum Z wird dabei nur dann als Punkt von $\mathfrak{B}$ mitgezählt, wenn die Projektionsgerade mit der Tangente an $\mathfrak{B}$ in Z zusammenfällt. Vermöge unserer Verabredung ist also $\overline{\mathfrak{B}}$ erklärt als identisch mit dem Träger eines Parameterbogens $\mathfrak{B}^*$, wobei $\mathfrak{B}^*$ ein-eindeutiges stetiges Bild von $\mathfrak{B}$ ist. $\mathfrak{B}^*$ ist von zweiter Ordnung; andernfalls nämlich existierte nach dem Reduktionssatze von Marchaud [9]) eine Gerade g in der Projektionsebene $\mathfrak{E}$, welche mit $\mathfrak{B}^*$ drei verschiedene innere Stellen gemeinsam hat und überdies $\overline{Z}$ nicht enthält; und dann wäre durch Z und g eine Ebene bestimmt, welche mit $\mathfrak{B}$ vier verschiedene Punkte gemeinsam hätte. Da $\mathfrak{B}^*$ von zweiter Ordnung ist, so ist jeder seiner Punkte nur einfach, $\overline{\mathfrak{B}}$ selbst ist Bogen oder Kurve zweiter Ordnung und insbesondere ohne mehrfache Punkte. *Die inneren Punkte von* $\mathfrak{B}$ *und* $\overline{\mathfrak{B}}$ *entsprechen also einander ein-eindeutig.* $\overline{\mathfrak{B}}$ enthält keine Teilstrecken. Die Projektionsebene $\mathfrak{E}$ ist dabei natürlich als ein projektiver R_2 zu denken.

1, 8. Für unsere späteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, die Begriffe Tangente und Tangentialschmiegebene noch durch etwas allgemeinere zu ergänzen, wie folgt (Nr. 1, 8—1, 9):

Unter einer „*Grenzgeraden* g *an* $\mathfrak{B}$“ im Punkte P verstehen wir den Limes einer Folge von Geraden g_ν, wobei $g_\nu = g(P_\nu^{(1)}, P_\nu^{(2)})$ zwei (verschiedene) Punkte $P_\nu^{(1)}$ und $P_\nu^{(2)}$ von $\mathfrak{B}$ verbindet und $P_\nu^{(1)} \to P$, $P_\nu^{(2)} \to P$. Liegen insbesondere durchweg $P_\nu^{(1)}$ und $P_\nu^{(2)}$ auf *verschiedenen* Seiten von P auf $\mathfrak{B}$, so heißt g „*Grenzsekante*“ [13]). Liegen dagegen die $P_\nu^{(1)}$ und $P_\nu^{(2)}$ für alle ν beide in der vorderen oder für alle ν beide in der hinteren Umgebung von P, so sprechen wir von einer „*vorderen*“ oder „*hinteren*“ „*Grenzgeraden*“ in P an $\mathfrak{B}$.

Wichtig für das Folgende wird nun nachstehende Tatsache:

I. *In jedem differenzierbaren inneren Punkt* P *von* $\mathfrak{B}$ *existiert nur eine einzige Grenzgerade* g, *nämlich die Tangente, gegen welche also jede Folge von Geraden* $g_\nu = g(P_\nu^{(1)}, P_\nu^{(2)})$ *konvergiert, falls nur* $P_\nu^{(1)} \to P$ *und* $P_\nu^{(2)} \to P$.

II. *Allgemeiner: In jedem (nicht notwendig differenzierbaren) Punkte* Q *von* $\mathfrak{B}$ *gibt es nur eine einzige vordere Grenzgerade, nämlich die vordere Tangente; ebenso nur eine hintere. Insbesondere ist also die Tangente im Anfangs- und Endpunkte von* $\mathfrak{B}$ *dort zugleich die einzige Grenzgerade.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß die Behauptung für *jede* Projektion $\bar{\mathfrak{U}}$ der Umgebung $\mathfrak{U}$ von P bzw. Q in eine, P oder Q nicht enthaltende Ebene $\mathfrak{E}$ richtig ist, falls das als differenzierbar vorausgesetzte Projektionszentrum Z von P bzw. Q verschieden ist und weder auf der Tangente in P bzw. Q noch auf der in Betracht kommenden Grenzgeraden g liegt. Unter diesen Annahmen über Z, welche keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeuten, ist nämlich g ebenso wie jede der g_ν eindeutig bestimmt aus ihren Projektionen bei zwei verschiedenen, geeignet gewählten Lagen des Projektionszentrums. Die Projektion einer Grenzsekante, einer vorderen Grenzgeraden und einer Tangente ist

---

[12]) Vgl. Fußnote [11]), a. a. O., Nr. 1, 2.

[13]) Siehe J. Hjelmslev, Contribution à la géométrie infinitesimale de la courbe réelle, Overs. over det kgl. Danske Vidensk. selsk. forhandl. 1911, Nr. 5, Seite 486. Vgl. auch A. Rosenthal, Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven, Math. Ann. **73** (1912), § 1, Nr. 7 und 9.

aber wieder Grenzsekante usw. an die betr. Projektion $\bar{\mathfrak{U}}$. — Es sei jetzt $\bar{P}$ bzw. $\bar{Q}$ die Projektion von P bzw. Q nach $\mathfrak{E}$:

a. Nun ist im Fall einer Grenz*sekante* die Behauptung I. für $\bar{\mathfrak{U}}$ richtig, sofern eben $\bar{\mathfrak{U}}$ in $\bar{P}$ differenzierbar ist [13]). Die Differenzierbarkeit von $\bar{\mathfrak{U}}$ in $\bar{P}$ folgt aber aus der Differenzierbarkeit von $\mathfrak{U}$ in P.

b. Liegt keine Grenzsekante vor, so benutzt man die Konvexität der einseitigen Umgebungen von $\bar{Q}$ auf $\bar{\mathfrak{U}}$ (vgl. Nr. 1, 7) und schließt folgendermaßen: Wählt man z. B. eine vordere Umgebung $\bar{\mathfrak{U}}^+$ von $\bar{Q}$ mit dem Endpunkt $\bar{E}$ und dem Anfangspunkt $\bar{Q}$ hinreichend klein, so ist der kleinere der beiden Winkel, welche von der vorderen Halbtangente $\bar{q}$ in $\bar{Q}$ an $\bar{\mathfrak{U}}^+$ und von der hinteren Halbtangente $\bar{e}$ in $\bar{E}$ an $\bar{\mathfrak{U}}^+$ gebildet werden, kleiner als ein beliebig vorgegebener Winkel [14]). Folglich schließt jede Halbgerade, welche einen Punkt A von $\bar{\mathfrak{U}}^+$ als Anfangspunkt besitzt und einen zweiten, oberhalb A auf $\bar{\mathfrak{U}}^+$ gelegenen Punkt B enthält, mit $\bar{q}$ sowohl als mit $\bar{e}$ einen beliebig kleinen Winkel ein. Daraus folgen unsere Behauptungen.

1. *Zusatz*: Man entnimmt aus Ziffer b des vorstehenden Beweises noch, daß *jede Grenzgerade an einen Konvexbogen Stützgerade* ist.

2. *Zusatz*: Auch wenn $\mathfrak{B}$ *von beliebiger Ordnung* ist, gilt noch [13]): *Ist* $\mathfrak{B}$ *im inneren Punkte P von* $\mathfrak{B}$ *differenzierbar, so gibt es in P nur eine einzige Grenzsekante, nämlich die Tangente in P.*

3. *Zusatz*: Die Menge aller Grenzgeraden an $\mathfrak{B}$ ist abgeschlossen.

1, 9. Unter einer „*Schmiegebene im weiteren Sinne an* $\mathfrak{B}$ *in Q*," *abgekürzt*: „*S.-E. i. w. S.*", verstehen wir jeden Limes einer Folge von Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$, deren jede durch ein (nicht kollineares) Tripel $Q_\nu^{(1)}, Q_\nu^{(2)}, Q_\nu^{(3)}$ von Punkten des Bogens $\mathfrak{B}$ festgelegt ist und wobei $Q_\nu^{(j)} \to Q$ für $\nu \to \infty$ $(j = 1, 2, 3)$. Ist $Q_\nu^{(1)} = Q$ für *alle* ν, so bezeichnen wir den (als vorhanden angenommenen) Limes der $\mathfrak{E}_\nu$ als „*Schmiegebene im engeren Sinne*", *abgekürzt*: „*S.-E. i. e. S.*". Liegen überdies die $Q_\nu^{(2)}, Q_\nu^{(3)}$ sämtlich in der gleichen einseitigen, also vorderen oder hinteren, Umgebung von Q, so sprechen wir auch von „*vorderer*" oder „*hinterer S.-E. i. e. S. an* $\mathfrak{B}$ *in Q*"; hingegen sprechen wir von einer „*beiderseitigen S.-E. i. e. S.*", falls etwa alle $Q_\nu^{(2)}$ in der vorderen und alle $Q_\nu^{(3)}$ in der hinteren Umgebung von Q gelegen sind. *Jede S.-E. i. e. S. ist zugleich S.-E. i. w. S.* Im allgemeinen wird in Q nicht nur *eine* S.-E. i. w. S. oder i. e. S. existieren.

Schließlich soll jede Halbebene durch Q, welche durch die vordere oder hintere Tangente begrenzt wird, eine „*vordere oder hintere Tangentialhalbebene an* $\mathfrak{B}$ *in Q*" heißen, *Abkürzung*: „*v.* (oder *h.*) *T. H.-E.*"; ihre Trägerebene werde als „*vordere oder hintere Tangentialebene an* $\mathfrak{B}$ *in Q*" bezeichnet, *abgekürzt*: „*v.* (oder *h.*) *T.-E.*"

Wir bemerken nun:

I. *Jede Schmiegebene im weiteren Sinne an* $\mathfrak{B}$ *in Q enthält eine Grenzgerade an* $\mathfrak{B}$ *in Q. Jede Schmiegebene im weiteren Sinne im Anfangs- oder Endpunkt enthält daher* (Nr. 1, 8; II.) *die Tangente in diesem Punkte an* $\mathfrak{B}$.

Bew.: Mit $\mathfrak{E}(P, L, M)$ bezeichne man eine Ebene, welche die drei Punkte P, L, M enthält. Ist nun $\mathfrak{E}$ die fragliche S.-E. i. w. S. in Q, ist also $\mathfrak{E} = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{E}(P_\nu^{(1)}, P_\nu^{(2)}, P_\nu^{(3)})$ mit $Q = \lim_{\nu\to\infty} P_\nu^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, so enthält wegen der Kompaktheit des projektiven Raumes

[14]) Vgl. z. B. Marchaud [2]), a. a. O., Seite 87.

z. B. die Folge $P_\nu^{(1)}$, $P_\nu^{(2)}$ eine Teilfolge $P_{\nu_\varrho}^{(1)}$, $P_{\nu_\varrho}^{(2)}$ von der Beschaffenheit, daß die Verbindungsgeraden von $P_{\nu_\varrho}^{(1)}$ und $P_{\nu_\varrho}^{(2)}$ eine Gerade g als Limes haben. Dann ist aber g Grenzgerade in Q an $\mathfrak{B}$; und zugleich ist g in $\mathfrak{E}$ enthalten.

II. *Eine vordere oder hintere oder beiderseitige Schmiegebene $\mathfrak{E}$ im engeren Sinne ist stets auch vordere oder hintere oder zugleich vordere und hintere Tangentialebene an $\mathfrak{B}$ im betrachteten Punkte Q.*

Bew.: Aus der Definition der vorderen usw. S.-E. i. e. S. ergibt sich, daß in $\mathfrak{E}$ die vordere usw. Tangente in Q an $\mathfrak{B}$ enthalten ist.

III. *Die vordere oder hintere Tangentialschmiegebene $\mathfrak{T}$ in Q an $\mathfrak{B}$ ist zugleich eine vordere oder hintere Schmiegebene im engeren Sinne in Q.*

Bew.: Sei $\mathfrak{T} = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{E}(t_\nu, Q_{\nu\nu})$. Dabei bezeichne $\mathfrak{E}(t_\nu, Q_{\nu\nu})$ diejenige Ebene, in welcher sowohl die vordere Tangente t_ν von Q liegt als auch der, auf $\mathfrak{B}$ vor Q gelegene, Punkt $Q_{\nu\nu}$ und wobei $Q_{\nu\nu} \to Q$ mit $\nu \to \infty$; alle $\mathfrak{E}(t_\nu, Q_{\nu\nu})$ können als eindeutig bestimmt angenommen werden, weil t_ν, mindestens in einer hinreichend kleinen Umgebung von Q, keine von Q verschiedene Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hat. Es bezeichne ferner $P_{\nu 1}, P_{\nu 2}, \ldots$ eine Folge von, zu Q vorderen, Punkten von $\mathfrak{B}$ mit $\lim_{\nu\to\infty} P_{\nu\nu} = Q$ und es sei durch $g(Q, P_{\nu\nu})$ die Verbindungsgerade von Q und $P_{\nu\nu}$ bezeichnet. Dann gilt: $t_\nu = \lim_{\nu\to\infty} g(Q, P_{\nu\nu})$. Wir können und wollen nun die $P_{\nu\nu}$ so wählen, daß $\mathfrak{E}(Q, P_{\nu\nu}, Q_{\nu\nu})$ für alle hinreichend großen ν in beliebig klein vorgegebener Nachbarschaft von $\mathfrak{E}(t_\nu, Q_{\nu\nu})$ liegt. Dann wird $\lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{E}(t_\nu, Q_{\nu\nu}) = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{E}(Q, P_{\nu\nu}, Q_{\nu\nu})$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Zusatz: Die Menge aller S.-E. i. w. S. an $\mathfrak{B}$ ist abgeschlossen; ebenso die Menge aller S.-E. i. e. S. in Q, sowie die der T.-E. in Q.

IV. *In jedem inneren differenzierbaren Punkte F von $\mathfrak{B}$, in welchem außerdem die vordere Tangentialschmieghalbebene mit der hinteren zusammenfällt, existiert nur eine einzige Schmiegebene $\mathfrak{H}$ im engeren Sinne, und zwar enthält $\mathfrak{H}$ die Tangentialschmieghalbebene in F.*

Bew.: 1. Man bezeichne mit t die Tangente in F, ferner mit $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ eine hintere und vordere Umgebung von F auf $\mathfrak{B}$, schließlich mit C und D den Endpunkt bzw. Anfangspunkt von $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{D}$; es ist also $F = C = D$. Nunmehr projiziere man, *mit F als Projektionszentrum*, eine hinreichend kleine zweiseitige Umgebung $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(F;\mathfrak{B})$ von F auf $\mathfrak{B}$ zentral auf eine, F nicht enthaltende, Ebene $\mathfrak{E}$, welche t, also auch die T. S. H.-E. in F nicht enthält. Als Bild $\bar{F}$ von F definiere man den Durchschnitt der Tangente t an $\mathfrak{B}$ in F mit $\mathfrak{E}$. Dann ist $\bar{F}$ ein einfacher Punkt der Projektion $\bar{\mathfrak{U}}$ von $\mathfrak{U}$, weil t mit $\mathfrak{B}$ keine zu F beliebig benachbarte und von F verschiedene Punkte gemeinsam hat; denn $\mathfrak{B}$ ist von endlicher Ordnung, nämlich zufolge Voraussetzung (Nr. 1, 1) von dritter Ordnung. Ferner stimmen die Halbtangenten $\bar{t}_C$ und $\bar{t}_D$ in $\bar{F}$ an die Bilder $\bar{\mathfrak{U}}_C$ und $\bar{\mathfrak{U}}_D$ von einseitigen Umgebungen $\mathfrak{U}_C = \mathfrak{U}(C;\mathfrak{C})$ und $\mathfrak{U}_D = \mathfrak{U}(D;\mathfrak{D})$ überein; denn diese Halbtangenten werden geliefert vom Durchschnitt von $\mathfrak{E}$ mit der h. bzw. v. T. S. H.-E. in F an $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{D}$. Somit ist $\bar{\mathfrak{U}} = \bar{\mathfrak{U}}_C \dotplus \bar{\mathfrak{U}}_D$ differenzierbar in $\bar{F}$.

2. Nun ist aber $\bar{\mathfrak{U}}_C \dotplus \bar{\mathfrak{U}}_D$, d. h. also eine zweiseitige Umgebung von $\bar{F}$ auf $\bar{\mathfrak{U}}$, von zweiter Ordnung in $\mathfrak{E}$. Folglich gibt es in $\bar{F}$ an $\bar{\mathfrak{U}}$ nur eine einzige Grenzgerade, nämlich die Tangente (vgl. den Beweis in Nr. 1, 8). Es projiziert sich aber jede S.-E. i. e. S. an $\mathfrak{U}$ in F als Grenzgerade an $\bar{\mathfrak{U}}$ in $\bar{F}$; denn jene ist Limes von Ebenen durch F, deren jede mit $\mathfrak{U}$ mindestens zwei, untereinander und von F verschiedene Punkte gemeinsam

hat, sich mithin nach $\mathfrak{E}$ als Gerade projiziert, welche mindestens zwei von $\bar{F}$ verschiedene Punkte von $\bar{\mathfrak{U}}$ enthält; letztere beiden Punkte in $\mathfrak{E}$ sind sicher verschieden, weil $\bar{\mathfrak{U}}_C \dotplus \bar{\mathfrak{U}}_D$ ein-eindeutiges Bild von $\mathfrak{U}_C \dotplus \mathfrak{U}_D$ ist. Daraus folgt die zu beweisende Behauptung.

V. Läßt man in IV. die *Annahme fallen, daß* $\mathfrak{B}$ *ein Bogen von dritter Ordnung* sei, so kann man doch wenigstens folgendes aussagen:

Vor.: Es sei der Bogen $\mathfrak{A}$ *von endlicher Ordnung. Im inneren Punkte F sei* $\mathfrak{A}$ *differenzierbar; außerdem soll die vordere Tangentialschmieghalbebene in F an* $\mathfrak{A}$ *mit der hinteren Tangentialschmieghalbebene in F an* $\mathfrak{A}$ *zusammenfallen.*

Beh. In F existiert nur eine einzige beiderseitige Schmiegebene $\mathfrak{H}$ *im engeren Sinn an* $\mathfrak{A}$; *und zwar fällt* $\mathfrak{H}$ *zusammen mit der Tangentialschmiegebene in F an* $\mathfrak{A}$.

Bew.: 1. Wie 1. im Beweise für IV., indem man $\mathfrak{A}$ an Stelle von $\mathfrak{B}$ treten läßt.

2. Jede *beider*seitige S.-E. i. e. S. in F an $\mathfrak{A}$ ist bei der hier benutzten Zentralprojektion Urbild einer Grenz*sekante* in $\bar{F}$ an $\bar{\mathfrak{U}}$. Wegen der Differenzierbarkeit von $\bar{\mathfrak{U}}$ in $\bar{F}$ gibt es aber nur eine einzige Grenzsekante in $\bar{F}$ an $\bar{\mathfrak{U}}$ (Nr. 1, 8; Zusatz 2). Mithin gibt es auch nur eine einzige beiderseitige S.-E. i. e. S. in F an $\mathfrak{A}$.

1, 10. Wir stellen nun noch (Nr. 1, 10—1, 12) einige Bemerkungen über die Grenzgeraden und Schmiegebenen zusammen, betreffend die Höchstzahl der Punkte von $\mathfrak{B}$, welche auf einer Grenzgeraden usw. liegen können. Zunächst bemerken wir:

Jede Grenzgerade in einem inneren Punkte Q von $\mathfrak{B}$ *hat mit* $\mathfrak{B}$ *keine Punkte außer Q gemeinsam, also weder innere Punkte noch den Anfangs- oder Endpunkt. — Eine Grenzgerade im Anfangs- oder Endpunkte von* $\mathfrak{B}$ *oder, was* (zufolge Nr. 1, 8; II.) *das gleiche, die Tangente in diesem Punkte, hat mit* $\mathfrak{B}$ *sicher keine inneren Punkte gemeinsam.*

Bew. Es sei g eine Grenzgerade in einem inneren Punkte Q von $\mathfrak{B}$. Bei Zentralprojektion aus einem geeigneten [15]), differenzierbaren Punkte wird g auf eine Stützgerade $\bar{g}$ des (Projektions-) Bildes $\bar{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ abgebildet (Nr. 1, 8; 1. Zusatz). Mithin kann $\bar{g}$ mit dem Bilde $\bar{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ keinen Punkt außer $\bar{Q}$, dem Bildpunkt von Q, gemeinsam haben, also wegen der Ein-eindeutigkeit der Abbildung (Nr. 1, 7) auch nicht g mit $\mathfrak{B}$. Ferner projiziert sich eine (Halb-) Tangente t z. B. im Endpunkt von $\mathfrak{B}$ wieder als Halbtangente $\bar{t}$ an $\bar{\mathfrak{B}}$ im Endpunkte von $\bar{\mathfrak{B}}$. Aber $\bar{t}$ kann mit $\bar{\mathfrak{B}}$ keinen *inneren* Schnitt- oder Stützpunkt gemeinsam haben, also auch nicht t mit $\mathfrak{B}$.

1, 11. *Satz: Eine Tangentialebene* $\mathfrak{T}$ *in einem inneren Punkte Q von* $\mathfrak{B}$ *hat nicht mehr als einen, von Q verschiedenen, inneren Punkt R mit* $\mathfrak{B}$ *gemeinsam; ist ein solcher innerer Punkt R vorhanden, so enthält* $\mathfrak{T}$ *weder den Anfangs- noch den Endpunkt von* $\mathfrak{B}$. *Eine Tangentialebene* $\mathfrak{T}^*$ *im Anfangs- oder Endpunkt von* $\mathfrak{B}$ *enthält nicht mehr als einen inneren Punkt R von* $\mathfrak{B}$; *ist ein solcher innerer Punkt R vorhanden, so enthält* $\mathfrak{T}^*$ *den End- bzw. Anfangspunkt von* $\mathfrak{B}$ *nicht.*

Beweis: Sei $\mathfrak{T}$ etwa vordere Tangentialebene im inneren Punkte Q von $\mathfrak{B}$, ferner R ein auf $\mathfrak{T}$ gelegener innerer, von Q verschiedener Punkt von $\mathfrak{B}$. Liegt außerdem der innere oder nicht-innere, von Q und R verschiedene Punkt V von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{T}$, so ist gewiß R ein *Schnitt*punkt auf $\mathfrak{T}$ (Nr. 1, 4). Ist ferner t die vordere Tangente in Q, so geht t sicher weder durch R noch durch V (Nr. 1, 10). Man kann daher t durch eine hinreichend benachbarte Sekante t_v ersetzen, welche außer Q noch einen zu Q vorderen, beliebig benachbarten Punkt Q_v von $\mathfrak{B}$, aber nicht R oder V, enthält; mithin ist eine Ebene $\mathfrak{T}_v$

[15]) Man braucht, was immer möglich ist, das Projektionszentrum nur so zu wählen, daß es nicht auf der betrachteten Grenzgeraden liegt.

durch t_v und V eindeutig bestimmt; und es enthält $\mathfrak{T}_v$ außer Q, Q_v und V noch einen zu R beliebig benachbarten Punkt R_v, also vier verschiedene Punkte von $\mathfrak{B}$. Dies ist unmöglich. Entsprechend ergibt sich die Behauptung für den Fall, daß Q Anfangs- oder Endpunkt ist.

1, 12. I. *Eine Schmiegebene $\mathfrak{S}$ im weiteren Sinne an $\mathfrak{B}$ in einem inneren Punkte Q von $\mathfrak{B}$ enthält keinen von Q verschiedenen Punkt von $\mathfrak{B}$, also weder einen inneren noch einen nicht-inneren. Übrigens ist Q Schnittpunkt auf $\mathfrak{S}$.*

Beweis: Ist $\mathfrak{S} = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{E}_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{E}(P_\nu^{(1)}, P_\nu^{(2)}, P_\nu^{(3)})$ mit $P_\nu^{(j)} \to Q \quad (j = 1, 2, 3)$, so kann man aus der Folge der Punktpaare $P_\nu^{(1)}$, $P_\nu^{(2)}$ eine Teilfolge $P_{\nu_\varrho}^{(1)}$, $P_{\nu_\varrho}^{(2)}$ auswählen, so daß die durch jene Paare bestimmten Geraden $g_\varrho = g(P_{\nu_\varrho}^{(1)}, P_{\nu_\varrho}^{(2)})$ gegen eine bestimmte auf $\mathfrak{S}$ gelegene, Grenzgerade g im inneren Punkte Q konvergieren. Dann hat g mit $\mathfrak{B}$ nur den Punkt Q gemeinsam (Nr. 1, 10). Ist daher L irgend ein von Q verschiedener, aber zu $\mathfrak{B}$ gehöriger Punkt von $\mathfrak{S}$, so existiert eine Umgebung von L, welche fremd ist zu g und zu fast allen g_ϱ. Daher ist auch $\mathfrak{S} = \lim_{\varrho\to\infty} \mathfrak{E}_\varrho^*$, wobei $\mathfrak{E}_\varrho^* = \mathfrak{E}(L, g_\varrho)$ die, L und g_ϱ enthaltende, eindeutig bestimmte Ebene bezeichnet. Auf $\mathfrak{E}_\varrho^*$ liegen, außer L, die inneren Punkte $P_{\nu_\varrho}^{(1)}$, $P_{\nu_\varrho}^{(2)}$ von $\mathfrak{B}$, letztere in beliebiger Nähe von Q für hinreichend großes ϱ; die $P_{\nu_\varrho}^{(1)}$ und $P_{\nu_\varrho}^{(2)}$ sind also Schnittpunkte auf $\mathfrak{E}_\varrho^*$ (Nr. 1, 4) und außer ihnen und L liegen keine Punkte von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{E}_\varrho^*$. Andererseits folgt aber aus der Definition von $\mathfrak{E}_\varrho^*$, daß — wie sogleich zu beweisen — für hinreichend großes ϱ in einer festen, L nicht enthaltenden, Umgebung von Q nur eine *ungerade* Anzahl Schnittpunkte von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{E}_\varrho^*$ liegen, also mindestens drei, womit wir einen Widerspruch haben. Um den Beweis für die Existenz einer ungeraden Anzahl von Schnittpunkten auf $\mathfrak{E}_\varrho^*$ in der Nähe von Q nachzuholen, bemerken wir, daß fast alle Ebenen $\mathfrak{E}_\nu = \mathfrak{E}(P_\nu^{(1)}, P_\nu^{(2)}, P_\nu^{(3)})$ Punkte *nur* aus einer beliebig vorgegebenen Umgebung $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(Q; \mathfrak{B})$ von Q auf $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam haben, nämlich eben die *Schnitt*punkte $P_\nu^{(1)}$, $P_\nu^{(2)}$, $P_\nu^{(3)}$. Man wähle nunmehr $\mathfrak{U}$ so klein, daß L außerhalb $\mathfrak{U}$ liegt und wähle ferner zwei Punkte P_v und P_h von $\mathfrak{B}$ außerhalb $\mathfrak{U}$, aber hinreichend nahe an Q, deren einer dem Bogen zwischen Q und L angehört, während der andere auf dem zu L fremden, von Q begrenzten Teilbogen von $\mathfrak{B}$ liegt. Dann liegen P_v und P_h auf verschiedenen „Seiten" fast aller $\mathfrak{E}_\nu$, also auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{S}$, also auf verschiedenen Seiten fast aller $\mathfrak{E}_\varrho^*$. „Zwischen" P_v und P_h liegt also auf $\mathfrak{B}$ eine ungerade Anzahl von Schnittpunkten der $\mathfrak{E}_\varrho^*$ mit $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{U}$, w. z. z. w. Durch analoge Betrachtungen folgt noch, daß Q *Schnitt*punkt auf $\mathfrak{S}$ ist.

Bemerkung: Obwohl wir im projektiven Raume arbeiten, können wir bei der eben angestellten Betrachtung doch den Begriff der „Seite" einer Ebene ohne weiteres verwenden, da sich die diesbezügliche Betrachtung ganz *im Kleinen* abspielt.

II. *Eine Schmiegebene $\mathfrak{S}$ im weiteren Sinne an $\mathfrak{B}$ im Anfangs- oder Endpunkt, hat mit $\mathfrak{B}$ keinen inneren Punkt gemeinsam.*

Beweis: Sei $\mathfrak{S}$ Schmiegebene etwa im Anfangspunkt A. Angenommen, es sei L innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ und auf $\mathfrak{S}$ gelegen.

Wäre dann L *Schnitt*punkt auf $\mathfrak{S}$, so gäbe es wegen $\mathfrak{S} = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{E}(P_\nu^{(1)}, P_\nu^{(2)}, P_\nu^{(3)})$, wo $P_\nu^{(j)} \to A$, solche, zu $\mathfrak{S}$ benachbarte Ebenen, welche mit $\mathfrak{B}$ außer den $P_\nu^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, noch je einen inneren Punkt L_ν von $\mathfrak{B}$ enthielten, der für passendes ν in beliebiger Nähe von L liegt. Die fraglichen Ebenen enthielten also vier verschiedene Punkte von $\mathfrak{B}$.

Wäre hingegen L *Stütz*punkt auf $\mathfrak{S}$, so benütze man eine etwas andere Darstellung von $\mathfrak{S}$. Man beachte nämlich, daß $\mathfrak{S}$ die Tangente t_a in A enthält (Nr. 1, 9; I) und daß t_a mit $\mathfrak{B}$ keinen inneren Punkt gemeinsam hat (Nr. 1, 10). Daher ist $\mathfrak{S}$ durch t_a und L eindeutig bestimmt und kann dargestellt werden als Limes von Ebenen $\mathfrak{E}_\varrho$ durch L und g_ϱ, wo g_ϱ eine Gerade durch A bezeichnet, welche überdies einen zu A benachbarten Punkt P_ϱ enthält. Nun besitzen aber fast alle $\mathfrak{E}_\varrho$ *entweder* L als Stützpunkt *oder* sie enthalten außer L in beliebig klein vorgegebener Umgebung von L noch mindestens einen, zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Schnittpunkt. Und da fast keine der g_ϱ durch L geht (Nr. 1, 10), so lassen sich auch im letzteren Falle Ebenen angeben, welche mit $\mathfrak{B}$ mindestens vier Punkte gemeinsam haben. Wir kommen also auch hier zu einem Widerspruch.

1, 13. Aus den vorstehend gewonnenen Sätzen ergeben sich einige für später wichtige Feststellungen, die wir bereits hier erwähnen.

1. *Jeder Bogen* $\mathfrak{B}$ *von dritter Ordnung im* R_3 *ohne ebene Teilbogen ist einem beschränkten Bogen projektiv aequivalent, d. h. es gibt mindestens eine Ebene, welche mit* $\mathfrak{B}$ *keinen Punkt gemeinsam hat* [1]).

Beweis: Es sei A der Anfangs- und E der Endpunkt von $\mathfrak{B}$; ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir beide als eigentliche Punkte annehmen. Wir betrachten eine Schmiegebene i. w. S. $\mathfrak{S}_a$ in A. Zufolge Nr. 1, 12; II hat $\mathfrak{S}_a$ mit $\mathfrak{B}$ höchstens noch E gemeinsam. Und da eine hinreichend kleine Umgebung von A und E auf $\mathfrak{B}$ je ganz auf einer Seite von $\mathfrak{S}_a$ liegt (ausgenommen A und E selber), so kann immer durch eine passende, beliebig kleine Änderung von $\mathfrak{S}_a$ eine Ebene erhalten werden, welche zu $\mathfrak{B}$ fremd ist.

2. Aus 1. folgt:

Ist der Limes einer aufsteigenden Folge von *Bogen* dritter Ordnung keinem beschränkten Bogen dritter Ordnung äquivalent, so ist der Limes eine *Kurve* dritter Ordnung. Der Limes muß nämlich wieder von dritter Ordnung sein [9]).

3. *Damit ein Bogen* $\mathfrak{B}$ *von dritter Ordnung ohne ebene Teilbogen echter Teilbogen eines Bogens* $\tilde{\mathfrak{B}}$ *von dritter Ordnung ohne ebene Teilbogen sei, ist notwendig, daß keine Schmiegebene* $\mathfrak{S}$ *von* $\mathfrak{B}$ *außer dem Berührungspunkt* Q *noch einen Punkt* L *von* $\mathfrak{B}$ *enthält. Dabei heißt* $\mathfrak{B}$ *echter Teilbogen von* $\tilde{\mathfrak{B}}$, *wenn nicht jeder Punkt von* $\tilde{\mathfrak{B}}$ *zu* $\mathfrak{B}$ *gehört.*

Andernfalls nämlich wäre entweder Q oder L innerer Punkt von $\tilde{\mathfrak{B}}$. Im ersteren Falle ergäbe sich ein Widerspruch zu Nr. 1, 12; I, im letzteren Falle zu Nr. 1, 12; II.

§ 2. Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung im R_3 zu einer Kurve dritter Ordnung.

2, 1. Mit den in § 1 angeführten Tatsachen haben wir die wesentlichen Hilfsmittel bereitgestellt zur Begründung einer Konstruktion, vermöge deren wir jeden *Bogen* dritter Ordnung zu einer *Kurve* dritter Ordnung erweitern können. Natürlicher Ausgangspunkt für unsere diesbezüglichen Überlegungen ist die Betrachtung der *Summe zweier Bogen* $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}$ *von dritter Ordnung* und die Frage nach *hinreichenden Bedingungen dafür, daß die fragliche Summe selbst wieder von dritter Ordnung ist.* Dabei werden wir [15a]) die beiden Bogen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ stets so zusammensetzen, daß der *Endpunkt* C *von* $\mathfrak{C}$ *mit dem Anfangspunkt* D *von* $\mathfrak{D}$ *zusammenfällt und daß ebenso die hintere Halbtangente* t_C *und die hintere Tangentialschmieghalbebene* $\mathfrak{H}_C$ *in* C *an* $\mathfrak{C}$ *zusammenfällt mit der vorderen Halbtangente* t_D *und mit der vorderen Tangentialschmieghalbebene* $\mathfrak{H}_D$ *in* D *an* $\mathfrak{D}$. Für eine solche Summe gelten

[15a]) Nur zur Vereinfachung.

dann insbesondere die Sätze der Nr. 1, 8; II; sowie Zusatz 2; und Nr. 1, 9; V; über die Einzigkeit der Grenzgeraden und der beiderseitigen Schmiegebene im engeren Sinne im Punkte $F = C = D$ an die Summe $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \dotplus \mathfrak{D}$ der beiden Bogen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$.

2, 2. Wie in Nr. 2, 1 bereits angekündigt, handelt es sich um die Gewinnung eines Kriteriums dafür, daß die Summe zweier Bogen dritter Ordnung selbst von dritter Ordnung ist. Zu diesem Zwecke konstatieren wir zunächst folgendes:

Satz. Vor.: 1. *Es seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zwei Bogen von dritter Ordnung, welche den Endpunkt C von $\mathfrak{C}$ und den Anfangspunkt D von $\mathfrak{D}$ gemeinsam haben: $F = C = D$. Ferner seien die Halbtangenten und die Tangentialschmieghalbebenen in C an $\mathfrak{C}$ und in D an $\mathfrak{D}$ identisch.*

2. *Die Projektion einer beiderseitigen Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von F auf $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \dotplus \mathfrak{D}$ aus einem nicht in $\mathfrak{U}_0$ gelegenen Punkte Z von $\mathfrak{B}$ liefere einen schlichten konvexen Kegelmantel* [16]) *ohne ebene Teilflächenstücke; jede Projektionsgerade habe also insbesondere mit $\mathfrak{U}_0$ höchstens einen Punkt gemeinsam.*

3. *F sei auf $\mathfrak{B}$ ein Punkt von mindestens vierter Ordnung.*

Beh.: *Es gibt Tangentialebenen an $\mathfrak{B}$ in F, welche mit jeder der beiden einseitigen Umgebungen $\mathfrak{U}_C = \mathfrak{U}(F; \mathfrak{C})$ und $\mathfrak{U}_D = \mathfrak{U}(F; \mathfrak{D})$ je mindestens einen von F verschiedenen Punkt gemeinsam haben. Dabei können $\mathfrak{U}_C$ und $\mathfrak{U}_D$ beliebig klein vorgegeben werden.*

Bew.: a. Zufolge der dritten Voraussetzung gibt es jedenfalls Ebenen $\mathfrak{E}$, welche mit einer beliebig klein vorgegebenen zweiseitigen Umgebung $\mathfrak{U}(F; \mathfrak{U}_0) = \mathfrak{U}_C \dotplus \mathfrak{U}_D$ von F auf $\mathfrak{U}_0$ mindestens vier Punkte gemeinsam haben. Da $\mathfrak{U}_C$ und $\mathfrak{U}_D$ von dritter Ordnung sind, muß also sowohl $\mathfrak{U}_C$ als $\mathfrak{U}_D$ mit $\mathfrak{E}$ je mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die fraglichen Punkte sämtlich als *Schnitt*punkte auf $\mathfrak{E}$ annehmen [17]). Wegen der zweiten Voraussetzung kann ferner $\mathfrak{E}$ nicht durch das Projektionszentrum gehen; andernfalls könnte ja $\mathfrak{E}$ höchstens zwei kegelerzeugende, also höchstens zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{U}_0$ enthalten. Somit bilden die Schnittkurven aller hier in Frage kommenden Ebenen $\mathfrak{E}$ mit dem Mantel des Projektionskegels ein System von $\mathfrak{K}_3$-Kurven mit $\mathfrak{U}_0$ als Grundbogen, wobei der spezielle Monotoniesatz gilt [18]).

b. Nachdem dies festgestellt ist, zeigen wir zunächst: Im Falle, daß unser Satz nicht richtig ist, gibt es wenigstens Ebenen $\mathfrak{E}$, welche durch F gehen und außerdem noch mindestens drei, von F und untereinander verschiedene, zu F beliebig benachbarte Punkte von $\mathfrak{U}_0$ enthalten. In der Tat: Kennt man unter den in a. betrachteten Ebenen $\mathfrak{E}$ noch keine, welche den Punkt F enthält, so fasse man irgend eine von den $\mathfrak{E}$ ins Auge. Unter den auf $\mathfrak{E}$ gelegenen verschiedenen Punkten von $\mathfrak{B}$ seien P_1, P_2, P_3, P_4 die an F auf $\mathfrak{B}$ nächstgelegenen; unter ihnen mögen P_1, P_2 diejenigen beiden sein, welche auf *verschiedenen* Seiten von F auf $\mathfrak{B}$ und am nächsten an F liegen. Wenn wir daher P_3 und P_4 festhalten und $\mathfrak{E}$ so ändern, daß etwa P_1 auf $\mathfrak{B}$ gegen F hinwandert, so wandert nach dem Monotoniesatz auch P_2 gegen F hin. Sehen wir nun vorläufig von der Möglichkeit ab, daß im Verlaufe unserer Änderung neue gemeinsame Punkte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ zwischen

---

[16]) d. h.: Der Schnitt des in Rede stehenden Kegelmantels mit einer, die Kegelspitze nicht enthaltenden, Ebene soll ein konvexer Bogen sein.

[17]) Zu jeder unserer Ebenen $\mathfrak{E}$ gibt es nämlich beliebig benachbarte Ebenen $\mathfrak{E}^*$, deren jede mindestens vier *Schnitt*punkte mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hat (vgl. [9])). Da $\mathfrak{B}$ von endlicher Ordnung ist, kann $\mathfrak{E}^*$ übrigens — in beliebiger Nähe von $\mathfrak{E}$ — sogar so gewählt werden, daß *alle* gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}^*$ *Schnitt*punkte sind (vgl. etwa „Über die Struktur reeller Kurven", Crelle's Journal 164 (1931), Nr. 1, 2; Zusatz 3).

[18]) Vgl. [5]), a. a. O., Nr. 3, 2.

P_1 und P_2 gewonnen werden, so sind i. w. folgende zwei Fälle [19]) denkbar: *Entweder* (*erstens*) erreicht *nur einer* der beiden Punkte P_1 und P_2 den Punkt F. Dann erhalten wir bereits eine Ebene $\mathfrak{E}$, auf welcher F und drei zu F beliebig benachbarte Punkte von $\mathfrak{B}$ liegen. Dieser Fall scheidet also aus. *Oder* (*zweitens*) P_1 und P_2 nähern sich *gleichzeitig* unbeschränkt dem Punkte F, während P_3 und P_4 unverändert festbleiben. Dann aber nähert sich die Verbindungsgerade von P_1 und P_2 der Grenzsekante, d. h. zufolge Nr. 1, 8; Zusatz 2; der Tangente in F an $\mathfrak{B}$. Mithin nähert sich $\mathfrak{E}$ einer Tangentialebene in F, welche überdies P_3 und P_4 enthält; P_3 und P_4 müssen wegen Nr. 1, 11 auf verschiedenen Seiten von F auf $\mathfrak{B}$ liegen, womit unser Satz bereits bewiesen wäre.

Sollten im Verlaufe der oben betrachteten Änderung von P_1, P_2 zwischen P_1 und F oder zwischen P_2 und F neue gemeinsame Punkte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ auftreten [20]), so lassen wir an Stelle von P_1 oder P_2 jeweils sogleich diejenigen Punkte von $\mathfrak{E}$ als „Stellvertreter" treten, welche auf $\mathfrak{B}$ am nächsten bei F liegen, und zwar auf der gleichen Seite von F wie P_1 oder P_2. Dadurch ändert sich an der Gültigkeit des Monotoniesatzes nichts, d. h.: Hält man nach wie vor P_3 und P_4 fest und läßt einen der Stellvertreter gegen F wandern, so wandert auch derjenige Punkt von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{B}$ gegen F, welcher auf der entgegengesezten Seite von F am nächsten bei F liegt. Unsere im vorhergehenden Absatze angestellten Überlegungen gelten daher auch im vorliegenden Falle unverändert, woraus sich das Gewünschte ergibt.

c. Aus dem in **b.** Bewiesenen entnehmen wir: Im Falle Tangentialebenen von der im Satze behaupteten Beschaffenheit nicht existieren, gibt es wenigstens Ebenen $\mathfrak{E}$, welche außer F noch mindestens drei, zu F beliebig benachbarte Punkte von $\mathfrak{U}_0$ enthalten. Unter der Annahme, daß wir noch keine Tangentialebene von der im Satze behaupteten Art kennen, betrachten wir daher eine unserer zuletzt genannten Ebenen $\mathfrak{E}$ durch F. Es seien etwa P_2, P_3, P_4 die drei, am nächsten bei F gelegenen Punkte von $\mathfrak{U}_0$ auf $\mathfrak{E}$; und unter ihnen seien P_2 und P_3 diejenigen, welche auf verschiedenen Seiten von F auf $\mathfrak{U}_0$ am nächsten bei F liegen. Wir ändern bei festem F und P_4 die Ebene $\mathfrak{E}$ so, daß P_2 gegen F wandert; dann wandert auch P_3 gegen F.

Zunächst sehen wir davon ab, daß im Verlaufe dieser Änderung neue gemeinsame Punkte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ zwischen F und P_2 oder zwischen F und P_3 auftreten, oder daß F Stützpunkt von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{E}$ wird. Dann sind nur zwei Fälle denkbar (vgl. **b.**): *Entweder* (*erstens*) rückt *nur einer* der beiden Punkte P_2, P_3 mit F zusammen. Dann geht $\mathfrak{E}$ in eine Tangentialebene $\mathfrak{E}^*$ in F an $\mathfrak{B}$ über, welche außer F noch mindestens zwei, beliebig nahe bei F gelegene, Punkte mit $\mathfrak{U}_C + \mathfrak{U}_D$ gemeinsam hat; und da $\mathfrak{U}_C$ sowohl als $\mathfrak{U}_D$ von dritter Ordnung sind, so liegen die genannten beiden Punkte gemäß Nr. 1, 11 auf verschiedenen Seiten von F auf $\mathfrak{B}$. Daher hat $\mathfrak{E}^*$ bereits die im Satze behauptete Eigenschaft. — *Oder* (*zweitens*) P_2 und P_3 rücken *gleichzeitig*, also von verschiedenen Seiten her, in beliebige Nähe von F. Dann geht $\mathfrak{E}$ zufolge Nr. 1, 9; V; im Limes über in die, wegen Voraussetzung 1. eindeutig bestimmte Tangentialschmiegebene $\mathfrak{S}$ in F an $\mathfrak{B}$; und es hat $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{U}_0$ außer F noch den zu F beliebig benachbarten Punkt P_4 gemeinsam. Da $\mathfrak{S}$ überdies vordere bzw. hintere Tangentialschmiegebene an die Bogen dritter Ordnung $\mathfrak{U}_D$ bzw. $\mathfrak{U}_C$ ist, so kann $\mathfrak{S}$ weder mit $\mathfrak{U}_D$ noch mit $\mathfrak{U}_C$ einen inneren Punkt gemeinsam haben (Nr. 1, 12; II; Nr. 1, 9; III). Wir haben damit einen Widerspruch vor uns und erkennen,

---

[19]) Es wäre von vorneherein noch denkbar, daß die monoton sich bewegenden Punkte P_1 und P_2 gegen von F verschiedene Grenzlagen konvergierten. Diese Möglichkeit führt aber zu nichts Neuem, weil alsdann $\mathfrak{E}$ gegen eine Ebene $\mathfrak{E}^*$ konvergieren würde, die mit $\mathfrak{U}_0$ mindestens vier untereinander und von F verschiedene Punkte gemeinsam hätte, so daß auf $\mathfrak{E}^*$ erneut der in Rede stehende Kontraktionsprozeß angewandt werden könnte.

[20]) Mehr als sechs Punkte von $\mathfrak{B}$ können keinesfalls auf $\mathfrak{E}$ liegen.

daß nur der erste Fall eintreten kann, welcher eben der zu beweisenden Behauptung entspricht.

Nunmehr erledigen sich auch die bisher außer Acht gelassenen Fälle, in welchen entweder zwischen P_2 und P_3 neue gemeinsame Punkte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ auftreten oder in welchen F Stützpunkt auf $\mathfrak{E}$ wird, ehe P_2 oder P_3 nach F rücken. Im letzteren Falle enthält die Endlage $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{E}$ sicher die Tangente in F an $\mathfrak{B}$; es ist also $\mathfrak{E}^*$ eine Tangentialebene von der im Satze behaupteten Art. Wir können daher diesen Fall von jetzt ab stets außer Betracht lassen und sogar stets annehmen, daß die Tangente in F an $\mathfrak{B}$ nicht mit $\mathfrak{E}$ inzidiert. Dann kann sich aber F niemals in mehrere Punkte aufspalten, vielmehr kann ein Gewinn neuer gemeinsamer Punkte von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{E}$ zwischen P_2 und P_3 nur in von F verschiedenen Punkten stattfinden. Wir verfahren im Falle eines solchen Gewinnes ebenso, wie vorher in **b.** und führen damit die Untersuchung zurück auf die im vorangehenden Absatze betrachteten Fälle. Damit ist der Beweis des in Rede stehenden Satzes geführt.

2, 3. Der in Nr. 2, 2 bewiesene Satz liefert ersichtlich eine notwendige Bedingung dafür, daß F auf $\mathfrak{C} + \mathfrak{D}$ ein Punkt von höherer als dritter Ordnung sei. Diese Bedingung ist aber auch eine hinreichende. Ist nämlich $\mathfrak{C} + \mathfrak{D}$ in F von dritter Ordnung, besitzt also F eine beiderseitige Umgebung $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{B}$ von dritter Ordnung, so kann zufolge Nr. 1, 11 keine Tangentialebene in F an $\mathfrak{B}$ mehr als *einen* inneren Punkt mit $\mathfrak{U}$ gemeinsam haben; unsere Bedingung ist daher nicht erfüllt. Wir haben somit den

Satz: Unter den Voraussetzungen 1. *und* 2. *des Satzes der Nr.* 2, 2 *ist F auf $\mathfrak{B}$ dann und nur dann ein Punkt von dritter Ordnung, wenn sich eine vordere und eine hintere Umgebung $\mathfrak{U}_v$ und $\mathfrak{U}_h$ von F auf $\mathfrak{B}$ angeben läßt, derart, daß keine Tangentialebene in F an $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{U}_v + \mathfrak{U}_h$ mehr als einen, von F verschiedenen inneren Punkt gemeinsam hat.*

2, 4. Für die Zwecke der in Aussicht gestellten Konstruktion ist auch folgende Modifikation des in Nr. 2, 3 bewiesenen Kriteriums bequem:

Satz: Vor. 1. (Vor. 1. des Satzes in Nr. 2, 2): *Es sei $\mathfrak{B}$ die Summe zweier Bogen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$, deren jeder von dritter Ordnung ist. Der Endpunkt C von $\mathfrak{C}$ falle mit dem Anfangspunkt D von $\mathfrak{D}$ zusammen: $F = C = D$. Ferner sei die Halbtangente und die Tangentialschmieghalbebene in C an $\mathfrak{C}$ identisch mit der Halbtangente bzw. mit der Tangentialschmieghalbebene in D an $\mathfrak{D}$.*

2. *$\mathfrak{B}$ sei ein einfacher Bogen, welcher ganz auf einem schlichten* [21]) *Konvexkegelmantel* [16]) *liegt, falls man ihn etwa vom Endpunkte von $\mathfrak{B}$ aus zentral projiziert.*

Beh.: Der ganze Bogen $\mathfrak{B}$ ist von dritter Ordnung, dann und nur dann, wenn der gemeinsame Punkt F der beiden Bogen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ von dritter Ordnung ist, also dann und nur dann, wenn keine Tangentialebene an $\mathfrak{B}$ in F mehr als einen von F verschiedenen und zu F beliebig benachbarten Punkt mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hat (vgl. die Beh. des Satzes in Nr. 2, 3).

Bew.: Für irgendeine Ebene, welche mindestens drei vom Endpunkt verschiedene Punkte von $\mathfrak{B}$ enthält, oder genauer gesagt, für ihre Schnittkurve mit dem Kegelmantel und für ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{B}$ gilt unter den gemachten Voraussetzungen der spezielle Monotoniesatz [18]). Daher gilt für jeden, den Endpunkt nicht enthaltenden Teilbogen $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ der „erste Existenzsatz", demzufolge $\mathfrak{B}^*$ dann und nur dann von dritter Ordnung ist, falls *alle* Punkte von $\mathfrak{B}^*$ eben diese Ordnung besitzen [22]), falls also F von dritter Ordnung ist. Sind aber *alle* Teilbogen $\mathfrak{B}^*$ von dritter Ordnung, so besitzt nach dem Reduktionssatze von Marchaud [9]) auch $\mathfrak{B}$ selbst eben diese Ordnung. w. z. z. w.

---

[21]) Es soll also jeder Projektionsstrahl mit $\mathfrak{B}$ nur *einen* Punkt gemeinsam haben.

[22]) Vgl. [5]), a. a. O., Nr. 5, 1.

Zusatz: Unser Kriterium gilt übrigens auch für den Fall, daß durch $\mathfrak{C} \dotplus \mathfrak{D}$ eine *Kurve* geliefert wird. Um dies zu erkennen, braucht man nur $\mathfrak{C} \dotplus \mathfrak{D}$ als Limes einer aufsteigenden Folge von Teilbogen darzustellen und zu beachten, daß zufolge des Reduktionssatzes die Kurve dann und nur dann von höherer als dritter Ordnung ist, falls dies für fast alle Teilbogen zutrifft [9]).

2, 5. Aus Nr. 2, 4 ergibt sich nun unmittelbar die Rechtfertigung der folgenden *Konstruktion, vermöge deren ein vorgegebener Bogen $\mathfrak{B}$ von dritter Ordnung zu einer den Bogen $\mathfrak{B}$ enthaltenden Kurve dritter Ordnung erweitert werden kann, falls die Tangentialschmiegebene im Anfangs- bzw. Endpunkt von $\mathfrak{B}$ den End- bzw. den Anfangspunkt von $\mathfrak{B}$ nicht enthält und falls die Trägergeraden der Halbtangenten in den beiden Endpunkten von $\mathfrak{B}$ einander nicht schneiden. Dabei soll $\mathfrak{B}$ keine ebenen Teilbogen enthalten.*

Konstruktion [4]): Es seien A und E der Anfangs- und Endpunkt von $\mathfrak{B}$, ferner t_a und t_e die Tangente, $\mathfrak{E}_a$ und $\mathfrak{E}_e$ die Tangentialschmiegebene an $\mathfrak{B}$ in A bzw. E. Die Ebenen durch A und t_e, sowie durch E und t_a bestimmen zusammen mit $\mathfrak{E}_a$ und $\mathfrak{E}_e$ ein Tetraeder T mit vier nicht komplanaren Eckpunkten (denn nach Voraussetzung liegt A nicht auf t_e, usw.). Durch projektive Transformation denken wir uns $\mathfrak{B}$ übergeführt in $\mathfrak{B}'$, dessen Tetraeder T' in bezug auf ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem x, y, z folgendermaßen liegt: $A'\{x = 0,\ y = 0,\ z = 0\}$; $t'_a\{y = 0,\ z = 0\}$, $\mathfrak{E}'_a\{z = 0\}$, $E'\{x = 0, y = 1, z = +\infty\}$, $t'_e\{x = 0, y = 1\}$, $\mathfrak{E}'_e\{y = 1\}$. Projiziert man $\mathfrak{B}'$ von E' aus auf $\mathfrak{E}'_a$, so schneidet der, auf der xy-Ebene senkrechte, Projektionszylinder $\mathfrak{Z}'$ die xy-Ebene, d. h. $\mathfrak{E}'_a$, in einem Konvexbogen $\mathfrak{K}'$, dessen Tangenten in Anfangs- und Endpunkt parallel zueinander sind und auf der Verbindungsstrecke $x = 0$, $0 \leqq y \leqq 1$, $z = 0$ von Anfangs- und Endpunkt des Konvexbogens $\mathfrak{K}'$ senkrecht stehen.

Wir spiegeln jetzt $\mathfrak{Z}'$, sowie $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{B}'$ an der yz-Ebene und erhalten als Bilder $\mathfrak{Z}'^*, \mathfrak{K}'^*, \mathfrak{B}'^*$. Dabei ist $\mathfrak{K}' \dotplus \mathfrak{K}'^*$ eine geschlossene Konvexkurve und $\mathfrak{B}'^*$ ist von dritter Ordnung mit der gleichen Halbtangente und Tangentialschmieghalbebene in A' wie $\mathfrak{B}'$, falls A' als Endpunkt von $\mathfrak{B}'^*$ gewählt wird. Weiter spiegeln wir $\mathfrak{Z}' \dotplus \mathfrak{Z}'^*$ und $\mathfrak{B}'^*$ an der xy-Ebene. Diese Spiegelung führt $\mathfrak{Z}' \dotplus \mathfrak{Z}'^*$ in sich über und liefert als Bild von $\mathfrak{B}'^*$ einen Bogen dritter Ordnung $\mathfrak{B}'^{**}$ und es ist $\mathfrak{B}' \dotplus \mathfrak{B}'^{**}$ eine *Kurve* dritter Ordnung. *Rechtfertigung der Konstruktion*: Setzt man $A' = F$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}'^{**} = \mathfrak{D}$, so erfüllen $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{C} \dotplus \mathfrak{D}$ ersichtlich die Voraussetzungen, wie sie in Nr. 2, 4 gemacht werden. Ferner ist hierbei F auf $\mathfrak{C} \dotplus \mathfrak{D}$, zufolge unserer Konstruktion, sicher von dritter Ordnung. Denn jede Tangentialebene an $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}'$ in $F = A'$ könnte nur unterhalb $\mathfrak{E}'_a$ Punkte mit $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}'^{**}$ gemeinsam haben und nur oberhalb $\mathfrak{E}'_a$ Punkte mit $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}'$. Aber jede Tangentialebene in F, welche einen inneren Punkt von $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}'$ enthält, verläuft unterhalb $\mathfrak{E}'_a$ sicher außerhalb des Zylinders $\mathfrak{Z}' \dotplus \mathfrak{Z}'^*$. Schließlich ist $\mathfrak{C} \dotplus \mathfrak{D}$ gewiß eine Kurve, also eine Kurve von dritter Ordnung (Nr. 2, 4; Zusatz), welche $\mathfrak{B}'$ als Teilbogen enthält.

Durch projektive Rücktransformation gelangt man also schließlich zu einer, $\mathfrak{B}$ als Teilbogen enthaltenden Kurve 3. Ordnung.

Eingegangen 1. Februar 1933.

Über die rationalen Punkte auf Kurven vom Geschlecht Eins.

Von *Kurt Mahler* in Manchester.

In seiner Arbeit (1) bewies C. Siegel vor einigen Jahren einen Satz, von dem eine Teilaussage folgendermaßen lautet:

Besitzt das irreduzible Polynom $f(x, y)$ rationale Koeffizienten und stellt die Gleichung $f(x, y) = 0$ eine algebraische Kurve mindestens vom Geschlecht Eins dar, so liegen auf dieser Kurve höchstens endlichviele Punkte mit ganzen rationalen Koordinaten.

Das Studium des Beweises dieses Satzes hat mich zu der Vermutung geführt, daß auf der Kurve $f(x, y) = 0$ sogar nur endlichviele Punkte (x, y) mit *rationalen* Koordinaten liegen, für die im Hauptnenner der beiden rationalen Zahlen x und y höchstens *endlich viele* feste Primzahlen aufgehen. Ein Beweis dieser Vermutung wird sich wahrscheinlich führen lassen, indem man die Methode der Siegelschen Arbeit verallgemeinert durch Hinzunahme der P-adischen Zahlen und Bewertungen, ähnlich wie in meiner Arbeit (2), wo ich dieses Verfahren zur Verallgemeinerung des Thue-Siegelschen Satzes benutzte.

Auf den folgenden Seiten wird dies im einzelnen ausgeführt für den Fall der Kurven vom Geschlecht Eins. Dabei ergibt das Siegelsche Verfahren durch solche P-adischen Überlegungen folgenden Satz:

Besitzt das irreduzible Polynom $f(x, y)$ rationale Koeffizienten und stellt die Gleichung $f(x, y) = 0$ eine Kurve vom Geschlecht Eins dar, auf der unendlichviele Punkte (x, y) mit rationalen Koordinaten liegen, ist ferner $g(x, y)$ eine rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten, die auf der Kurve nicht konstant ist, so wächst die größte Primzahl, die im Nenner der rationalen Zahl $g(x, y)$ aufgeht, über alle Grenzen, wenn (x, y) eine unendliche Folge von Punkten auf der Kurve mit rationalen Koordinaten durchläuft.

Wählt man $g(x, y) = x$ oder y, so ist hierin speziell meine Vermutung für den Fall des Geschlechts Eins enthalten.

Der Beweis ist ganz analog dem Siegelschen. Die ersten Paragraphen sind infolge dessen fast wörtlich der Siegelschen Abhandlung entnommen. Unterschiede treten erst später auf, wenn ausgenutzt wird, daß im Nenner von $g(x, y)$ nur die gegebenen Primzahlen aufgehen. Alsdann muß man alle Schlüsse jeweils gleichzeitig für die Absolutbetragbewertung und die verschiedenen P-adischen Bewertungen durchführen. Auf diese Art läßt sich der Beweis schließlich ableiten aus meiner Verallgemeinerung des Thue-Siegelschen Satzes.

Herrn Prof. Siegel bin ich sehr zu Dank verpflichtet für eine wesentliche Vereinfachung des Beweises im letzten Paragraphen.

Literaturverzeichnis.

(1) C. Siegel, Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen, Abh. d. Preußischen Akademie der Wissenschaften, Phys. Math. Klasse, Jahrgang 1929, Nr. 1.

(2) K. Mahler, Zur Approximation algebraischer Zahlen, I, Math. Annalen **107** (1933).
(3) H. Poincaré, Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, Journal de math. pures et appl. (V) **7** (1901).
(4) Tr. Nagell, Sur les propriétés arithmétiques des cubiques planes du premier genre, Acta Math. **52** (1929).
(5) L. J. Mordell, On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees, Proc. of the Cambridge Philos. Soc. **21** (1922).
(6) A. Weil, L'arithmétique sur les courbes algébriques, Acta Math. **52** (1929).

1. Eine Kurve C h-ter Ordnung vom Geschlecht Eins besitze die Gleichung

$$f(x, y) = 0,$$

wobei $f(x, y)$ ein irreduzibles Polynom in x und y mit rationalen Koeffizienten ist. Es werde angenommen, daß auf C unendlichviele Punkte (x, y) mit rationalen Koordinaten liegen. Alsdann gibt es eine birationale Transformation

$$x = \Phi(u, t), \quad y = \Psi(u, t)$$

mit der dazu inversen Transformation

$$u = \varphi(x, y), \quad t = \psi(x, y),$$

die die Gleichung von C auf die spezielle Form

$$t^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3$$

transformiert. Dabei werden die Invarianten g_2, g_3 und auch die Koeffizienten der rationalen Funktionen $\Phi, \Psi, \varphi, \psi$ rationale Zahlen, wie aus bekannten Sätzen folgt [1]).

Ist $\wp(s)$ die Weierstraßsche elliptische Funktion mit den Invarianten g_2, g_3, so läßt sich C uniformisieren durch die Gleichungen

$$u = \wp(s), \quad t = \wp'(s).$$

Der *Satz von Mordell und Weil* besagt nun, daß die Argumente s, die zu den rationalen Punkten (x, y) auf C gehören, einen endlichen Modul bilden, d. h. sich alle in der Form

$$n_1 s_1 + n_2 s_2 + \cdots + n_q s_q$$

darstellen lassen, wo $s_1, s_2, \ldots, s_q$ endlichviele komplexe Zahlen sind und wo $n_1, n_2, \ldots, n_q$ einzeln alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen [2]).

2. Sei $g(x, y)$ eine rationale Funktion von x und y mit rationalen Koeffizienten, die auf C nicht identisch konstant ist, also etwa jeden Wert r-mal annimmt. Beim Übergang zu der Veränderlichen s verwandelt sich $g(x, y)$ in eine elliptische Funktion

$$G(s) = g(x, y)$$

von der Ordnung r.

In den rationalen Punkten (x, y) auf C wird $g(x, y)$ selbst eine rationale Zahl; als gekürzter Bruch geschrieben laute diese

$$g(x, y) = \frac{Z(g(xy))}{N(g(xy))},$$

wo also $Z(g(xy))$ und $N(g(xy))$ teilerfremde ganze rationale Zahlen bedeuten; natürlich sind Z und N nur arithmetische Funktionen von (x, y).

Von jetzt ab werde die Annahme gemacht, daß auf C eine unendliche Menge $\mathfrak{M}$ rationaler Punkte (x, y) liegt, in denen der Nenner N von $g(x, y)$ nur teilbar durch endlichviele fest gegebene Primzahlen

$$P_1, P_2, \ldots, P_p$$

wird; hieraus soll ein Widerspruch hergeleitet werden Dazu muß man zeigen, daß es

[1]) Daß sich diese Koeffizienten in der Tat rational wählen lassen, folgt aus Überlegungen von Poincaré. Siehe (3), S. 176—180, und (4), S. 94—95. Ein anderer Beweis wird im Anhang der vorliegenden Arbeit dargestellt.

[2]) Siehe (5) und (6).

neben $g(x, y)$ unendlichviele andere rationale Funktionen mit derselben Eigenschaft und zwar von beliebig hoher Ordnung gibt.

3. Die Argumente s, die zu den Punkten (x, y) der Menge $\mathfrak{M}$ gehören, besitzen nach 1. die Gestalt

$$n_1 s_1 + n_2 s_2 + \cdots + n_q s_q,$$

und zwar durchläuft für sie $(n_1, n_2, \ldots, n_q)$ unendlichviele Systeme von je q ganzen rationalen Zahlen. Sei nun n eine beliebig große natürliche Zahl. Dann läßt sich setzen:

$$n_1 s_1 + n_2 s_2 + \cdots + n_q s_q = n(m_1 s_1 + m_2 s_2 + \cdots + m_q s_q) + (n_1^0 s_1 + n_2^0 s_2 + \cdots + n_q^0 s_q),$$

wobei jede der Zahlen $n_1^0, n_2^0, \ldots, n_q^0$ in der Folge $0, 1, 2, \ldots, n-1$ liegt, die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_q$ aber wieder ganz rational sind. Für die Summe

$$n_1^0 s_1 + n_2^0 s_2 + \cdots + n_q^0 s_q$$

gibt es hiernach nur endlichviele Möglichkeiten, während das Zahlsystem $(m_1, m_2, \ldots, m_q)$ für die Punkte aus $\mathfrak{M}$ unendlichviele Werte annimmt.

Es ist demnach möglich, eine unendliche Teilmenge $\mathfrak{M}_n^*$ von Punkten (x, y) aus $\mathfrak{M}$ auszuwählen, für die in der Zerlegung

$$n_1 s_1 + n_2 s_2 + \cdots + n_q s_q = n(m_1 s_1 + m_2 s_2 + \cdots + m_q s_q) + (n_1^0 s_1 + n_2^0 s_2 + \cdots + n_q^0 s_q)$$

der Ausdruck

$$s^0 = n_1^0 s_1 + n_2^0 s_2 + \cdots + n_q^0 s_q$$

jedesmal derselbe ist. Der Menge $\mathfrak{M}_n^*$ ist eineindeutig die Menge $\mathfrak{M}_n$ der Punkte (x, y) mit den Argumenten

$$m_1 s_1 + m_2 s_2 + \cdots + m_q s_q$$

zugeordnet; es ist klar, daß die elliptische Funktion

$$G_n(s) = G(ns + s^0)$$

in den Punkten von $\mathfrak{M}_n$ wieder einen rationalen Wert erhält, in dessen Nenner nur die gegebenen Primzahlen $P_1, P_2, \ldots, P_p$ aufgehen. Als elliptische Funktion ist $G_n(s)$ genau von der Ordnung $n^2 r$, und zwar sieht man leicht, daß $G_n(s)$ an jeder Stelle einen Wert höchstens r-fach annimmt. Geht man von dem Argument s wieder zurück zu den Veränderlichen x, y auf der Kurve C, so geht $G_n(s)$ über in eine rationale Funktion

$$G_n(s) = g_n(x, y)$$

in x und y; nach den Annahmen in 1. und auf Grund des Additionstheorems der elliptischen Funktionen besitzt diese lauter rationale Koeffizienten; sie nimmt auf C jeden Wert genau $(n^2 r)$-mal, und zwar an jeder Stelle höchstens r-fach, an.

Nachdem so die unendlichvielen Funktionen

$$g_n(x, y) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und die zugehörigen unendlichen Mengen

$$\mathfrak{M}_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

rationaler Punkte (x, y) auf C konstruiert worden sind, in denen diese Funktionen rationale Zahlen werden, in deren Nenner allein die gegebenen Primzahlen aufgehen, braucht von den elliptischen Funktionen kein Gebrauch mehr gemacht zu werden. Zur Abkürzung werde die Darstellung von $g_n(x, y)$ als gekürzter Bruch in den rationalen Punkten (x, y) auf C in der Form

$$g_n(x, y) = \frac{Z(g_n(xy))}{N(g_n(xy))}$$

geschrieben, wo also Z und N teilerfremde ganze rationale Zahlen sind [3]).

[3]) Die bisherigen Schlüsse sind ganz der Arbeit (1), S. 52—54, entnommen.

4. Es werde jetzt näher auf die arithmetischen Eigenschaften der Funktionswerte $g_n(x, y)$ in den Punkten der Menge $\mathfrak{M}_n$ eingegangen. Die beiden Funktionen $g_n(x, y)$ und $g_n(x, y) - 1$ verschwinden nicht an gleichen Stellen. Also läßt sich eine unendliche Teilfolge $\mathfrak{N}_n$ von Punkten (x, y) aus $\mathfrak{M}_n$ auswählen, die alle außerhalb von endlichen Umgebungen der Nullstellen einer dieser beiden Funktionen bleiben, etwa der Funktion $g_n(x, y) - e$, wo also e eine bestimmte der Zahlen 0 und 1 ist. Der gewöhnliche Absolutbetrag von $g_n(x, y) - e$ bleibt also für alle Punkte von $\mathfrak{N}_n$ oberhalb einer positiven Konstanten, dementsprechend der Absolutbetrag der reziproken Funktion

$$\gamma_n(x, y) = \frac{1}{g_n(x, y) - e}$$

unterhalb einer endlichen positiven Konstanten. In allen rationalen Punkten (x, y) auf C stellt auch $\gamma_n(x, y)$ eine rationale Zahl dar; als gekürzter Bruch läßt sich dieselbe etwa in der Form

$$\gamma_n(x, y) = \frac{Z(\gamma_n(xy))}{N(\gamma_n(xy))}$$

schreiben, wo Z und N auch hier teilerfremden ganzen rationalen Zahlen gleich werden. Es ist natürlich

$$Z(\gamma_n(xy)) = N(g_n(xy)).$$

Für die unendlichvielen Punkte (x, y) aus $\mathfrak{N}_n$ gehen demnach in $Z(\gamma_n(x, y))$ nur die endlichvielen gegebenen Primzahlen $P_1, P_2, \ldots, P_p$ auf; hiernach ist dieser Zähler in jenen Punkten speziell von Null verschieden.

5. Nach C. Siegel läßt sich für den gewöhnlichen Absolutbetrag des Quotienten

$$\frac{\gamma_n(x, y)}{Z(\gamma_n(xy))}$$

eine obere Schranke arithmetischer Art angeben, falls (x, y) nur solche rationalen Punkte auf C durchläuft, in denen $|\gamma_n(x, y)|$ unterhalb einer positiven endlichen Zahl C_0 bleibt, und in denen $\gamma_n(x, y)$ nicht verschwindet; diese beiden Bedingungen sind insbesondere in $\mathfrak{N}_n$ erfüllt.

Sei für einen rationalen Punkt (x, y) auf C der gemeinsame Hauptnenner von x und y gleich ζ und alsdann

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{\zeta},$$

so daß ξ, η, ζ drei endliche teilerfremde ganze rationale Zahlen werden. Bedeutet noch ε eine positive beliebig kleine Zahl, so lautet die Ungleichung von Siegel [4]):

$$\left|\frac{\gamma_n(x, y)}{Z(\gamma_n(xy))}\right| \leqq c(|\xi| + |\eta| + |\zeta|)^{-\frac{n^2 r}{h} + \varepsilon};$$

dabei bedeutet c eine solche positive Konstante, die allein von ε und der Schranke C_0 abhängt. Der Exponent n^2r steht hierbei als Ordnung von $\gamma_n(x, y)$.

Diese Ungleichung setzt nicht voraus, daß (x, y) in $\mathfrak{N}_n$ liegt. Beschränkt man sich aber auf die rationalen Punkte *dieser* Menge, so läßt sich die linke Seite auf eine Form bringen, in der $Z(\gamma_n(xy))$ nicht mehr vorkommt. Bedeute dazu wie üblich $|\alpha|_p$ den

[4]) Siehe (1), S. 52.

P-adischen Wert einer P-adischen Zahl. Alsdann wird für die Punkte in $\mathfrak{N}_n$ gerade

$$\frac{1}{|Z(\gamma_n(xy))|} = \prod_{\tau=1}^{p} |\gamma_n(x, y)|_{P_\tau},$$

denn nach Voraussetzung ist in den Punkten von $\mathfrak{N}_n$ der Zähler Z von $\gamma_n(x, y)$ ein Potenzprodukt allein von $P_1, P_2, \ldots, P_p$, während der Nenner N wegen seiner Teilerfremdheit zu Z natürlich auch zu diesen Primzahlen teilerfremd ist [5]).

Damit nimmt die Siegelsche Ungleichung die Form

$$|\gamma_n(x, y)| \prod_{\tau=1}^{p} |\gamma_n(x, y)|_{P_\tau} \leqq c(|\xi| + |\eta| + |\zeta|)^{-\frac{n^2 r}{h} + \varepsilon}$$

an; diese gilt aber selbstverständlich nur noch für die Punkte aus $\mathfrak{N}_n$. Der Bequemlichkeit halber werde im folgenden ε gleich $\frac{n^2 r}{2h}$ gesetzt, so daß die letzte Ungleichung die noch etwas einfachere Form

$$|\gamma_n(x, y)| \prod_{\tau=1}^{p} |\gamma_n(x, y)|_{P_\tau} \leqq c(|\xi| + |\eta| + |\zeta|)^{-\frac{n^2 r}{2h}}$$

bekommt.

6. Es gibt nur endlichviele Punkte (x, y) in der Menge $\mathfrak{N}_n$, für die die natürliche Zahl $|\xi| + |\eta| + |\zeta|$ beschränkt ist. Durchläuft also (x, y) alle Punkte von $\mathfrak{N}_n$, so muß $|\xi| + |\eta| + |\zeta|$ über alle Grenzen, die rechte Seite der letzten Ungleichung also gegen Null streben. Das Produkt

$$|\gamma_n(x, y)| \prod_{\tau=1}^{p} |\gamma_n(x, y)|_{P_\tau}$$

strebt also gleichfalls gegen Null, folglich auch einige seiner Faktoren. Der Einfachheit halber soll angenommen werden, daß alle Faktoren

$$|\gamma_n(x, y)|, \quad |\gamma_n(x, y)|_{P_1}, \quad |\gamma_n(x, y)|_{P_2}, \ldots, |\gamma_n(x, y)|_{P_p}$$

gegen Null streben. Falls dies nicht zutrifft, brauchte man für die folgende Untersuchung nur einige dieser Bewertungen von der Betrachtung auszuschließen und eventuell statt $\mathfrak{N}_n$ eine Teilmenge hiervon zu nehmen; im Ganzen würde sich aber nichts Wesentliches an der Beweisführung ändern.

7. Genau so wie die Funktion $g_n(x, y)$ nimmt auch die Funktion $\gamma_n(x, y)$ auf C jeden Wert $(n^2 r)$-mal und zwar an jeder Stelle höchstens r-fach an. Es muß eine lineare Funktion

$$z = a_1 x + a_2 y$$

mit zwei ganzen rationalen Koeffizienten a_1 und a_2 geben, die speziell in allen Nullstellen von $\gamma_n(x, y)$, so weit diese getrennt liegen, auch verschiedene Werte erhält. Durchläuft nun (x, y) alle Punkte aus $\mathfrak{N}_n$, so nimmt z unendlichviele rationale Werte an. Nach den Konvergenzgesetzen der Körper der reellen und P-adischen Zahlen ist es möglich, eine unendliche Teilfolge aus $\mathfrak{N}_n$, welche $\mathfrak{N}_n^*$ heiße, so auszuwählen, daß in ihr die Zahl z gleichzeitig gegen eine reelle Zahl α, eine P_1-adische Zahl α_1, eine P_2-adische Zahl $\alpha_2, \ldots,$ eine P_p-adische Zahl α_p konvergiert, wobei einige von diesen Zahlen auch unendlich groß sein können und die Konvergenz jeweils in bezug auf die betreffende Bewertung zu verstehen ist.

Es gibt eine ganze rationale Zahl a_3 unter den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p + 1$, die von

---

[5]) Der letzte Schluß setzt voraus, daß im Zähler $Z(\gamma_n(xy))$ wirklich alle Primzahlen $P_1, P_2, \ldots, P_p$ aufgehen; darin liegt aber keine wesentliche Einschränkung.

den sämtlichen Grenzwerten

$$-\alpha, -\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_p$$

verschieden ist; dabei ist zu berücksichtigen, daß a_3 als rationale Zahl mit jedem dieser Grenzwerte in einem gemeinsamen Körper liegt, der Begriff der Ungleichheit also Sinn hat. Mit der so bestimmten Zahl a_3 werde die neue rationale Funktion auf C

$$Z(x, y) = \frac{1}{z + a_3} = \frac{1}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}$$

eingeführt; durchläuft (x, y) alle Punkte aus $\mathfrak{N}_n^*$, so konvergieren die verschiedenen Bewertungen

$$|Z(x, y)|, \quad |Z(x, y)|_{P_1}, \quad |Z(x, y)|_{P_2}, \ldots, |Z(x, y)|_{P_p}$$

der Reihe nach gegen die reelle, die P_1-adische, die P_2-adische, . . ., die P_p-adische Zahl

$$\frac{1}{\alpha + a_3}, \quad \frac{1}{\alpha_1 + a_3}, \quad \frac{1}{\alpha_2 + a_3}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p + a_3},$$

und diese sind alle endlich, da die Nenner nach Voraussetzung nicht verschwinden. Daraus folgt insbesondere, daß die Werte

$$|Z(x, y)|, \quad |Z(x, y)|_{P_1}, \quad |Z(x, y)|_{P_2}, \ldots, |Z(x, y)|_{P_p}$$

von $Z(x, y)$ beschränkt bleiben, wenn (x, y) die unendlichvielen Punkte aus $\mathfrak{N}_n^*$ durchläuft; die etwaigen endlichvielen Ausnahmepunkte dieser Menge, in denen gerade $z = -a_3$ ist, denken wir dabei bereits aus $\mathfrak{N}_n^*$ fortgelassen.

8. Die neue rationale Funktion $Z(x, y)$ besitzt genau wie die lineare Funktion $z = a_1 x + a_2 y$ die Eigenschaft, in allen Nullstellen von $\gamma_n(x, y)$, soweit diese getrennt liegen, verschiedene Werte anzunehmen. Zwischen

$$Z(x, y) \text{ und } \gamma_n(x, y)$$

besteht eine algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die in $Z(x, y)$ von nicht höherem Grad als $n^2 r$ ist, weil ja $\gamma_n(x, y)$ diese Ordnung hat. Man kann die Gleichung in der Form

$$F(Z(x, y)) + \gamma_n(x, y)\, G(Z(x, y),\ \gamma_n(x, y)) = 0$$

schreiben, wobei $F(Z)$ ein Polynom in Z, $G(Z, \gamma_n)$ ein Polynom in Z und γ_n ist und beide lauter rationale Koeffizienten haben. Die Nullstellen von $F(Z)$ entsprechen den Stellen auf der Kurve C mit $\gamma_n(x, y) = 0$; sie können also alle höchstens r-fach sein; ferner darf $F(Z)$ in Z von nicht höherem Grad als $n^2 r$ sein.

Durchläuft (x, y) die Punkte von $\mathfrak{N}_n^*$, so streben die Bewertungen

$$|\gamma_n(x, y)|, \quad |\gamma_n(x, y)|_{P_1}, \quad |\gamma_n(x, y)|_{P_2}, \ldots, |\gamma_n(x, y)|_{P_p}$$

nach Voraussetzung gegen Null, während die Bewertungen

$$|Z(x, y)|, \quad |Z(x, y)|_{P_1}, \quad |Z(x, y)|_{P_2}, \ldots, |Z(x, y)|_{P_p}$$

beschränkt bleiben. Also bleiben auch die Bewertungen

$$|G(Z(x, y), \gamma_n(x, y))|, \quad |G(Z(x, y), \gamma_n(x, y))|_{P_\tau} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

alle beschränkt, etwa unterhalb der positiven Konstanten c_1. Dann geht die obige Gleichung gerade in die $p + 1$ Ungleichungen

$$|F(Z(x, y))| \leqq c_1 |\gamma_n(x, y)|, \quad |F(Z(x, y))|_{P_\tau} \leqq c_1 |\gamma_n(x, y)|_{P_\tau} \quad (\tau = 1, 2,, \ldots, p)$$

über, und aus der Siegelschen Ungleichung entsteht eine solche für die Funktion $F(Z)$:

$$|F(Z(x, y))| \prod_{\tau=1}^{p} |F(Z(x, y))|_{P_\tau} \leqq c c_1^{p+1} (|\xi| + |\eta| + |\zeta|)^{-\frac{n^2 r}{2\lambda}}.$$

Man kann dieser Ungleichung noch eine einfachere Form geben und damit zu einer Frage

über Diophantische Approximationen im Rationalen gelangen. Sei zu diesem Zweck für beliebige rationale Punkte (x, y) mit

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{\zeta}, \qquad (\xi, \eta, \zeta) = 1$$

die Darstellung der gleichfalls rationalen Zahl $Z(x, y)$ als gekürzter Bruch gegeben in der Form

$$Z(x, y) = \frac{X}{Y},$$

wo X und Y teilerfremde ganze rationale Zahlen sind. Es ist

$$Z(x, y) = \frac{1}{a_1 x + a_2 y + a_3} = \frac{\zeta}{a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \zeta};$$

die Zahl

$$|X, Y| = \max(|X|, |Y|)$$

bleibt also stets kleiner als

$$c_3(|\xi| + |\eta| + |\zeta|),$$

wobei c_2 eine positive Konstante bedeutet. Durchläuft der Punkt (x, y) die Folge $\mathfrak{N}_n^*$, so nimmt ferner die Funktion $Z(x, y)$ unendlichviele verschiedene Werte an, denn die Kurve C hat mit jeder Geraden nur endlichviele Punkte gemeinsam.

Beachtet man noch, daß

$$c c_1^{p+1}(|\xi| + |\eta| + |\zeta|)^{-\frac{n^2 r}{2h}} \leqq c c_1^{p+1}(c_2^{-1}|X, Y|)^{-\frac{n^2 r}{2h}}$$

ist, und setzt man

$$c_3 = c c_1^{p+1} c_2^{\frac{n^2 r}{2h}},$$

so ist damit gezeigt, daß es eine unendliche Folge gekürzter rationaler Zahlen $Z = X/Y$ gibt, für die das Polynom $F(Z)$ der Ungleichung

$$\left|F\left(\frac{X}{Y}\right)\right| \prod_{\tau=1}^{p} \left|F\left(\frac{X}{Y}\right)\right|_{P_\tau} \leqq c_3 |X, Y|^{-\frac{n^2 r}{2h}}$$

genügt.

9. Um von hier aus zu einem Widerspruch zu kommen, muß man von dem verallgemeinerten Thue-Siegelschen Satz Gebrauch machen. Dieser läßt sich nicht unmittelbar anwenden, weil das Polynom $F(Z)$ im allgemeinen reduzibel ist. Es möge im Körper der rationalen Zahlen etwa in die Faktoren

$$F(Z) = \prod_{\lambda=1}^{l} F_\lambda(Z)^{d_\lambda}$$

zerfallen, wobei

$$F_1(Z), \quad F_2(Z), \ldots, \quad F_l(Z)$$

lauter verschiedene irreduzible Polynome in Z mit rationalen Koeffizienten sind, und die sämtlichen Exponenten

$$d_1, d_2, \ldots, d_l$$

natürliche Zahlen bedeuten, die nicht größer als r sind.

Bezeichnet $F_\lambda(Z)$ und $F_\mu(Z)$ zwei verschiedene von den letzten Polynomen, so müssen diese wegen ihrer Irreduzibilität zueinander teilerfremd sein. Es gibt also eine nichtverschwindende rationale Zahl d und zwei Polynome $F_\lambda^*(Z)$ und $F_\mu^*(Z)$ mit rationalen Koeffizienten, so daß identisch

$$F_\lambda(Z) F_\lambda^*(Z) + F_\mu(Z) F_\mu^*(Z) = d$$

ist. Gemäß der Konstruktion sind aber die sämtlichen Bewertungen

$$|Z(x, y)|, \quad |Z(x, y)|_{P_1}, \quad |Z(x, y)|_{P_2}, \ldots, |Z(x, y)|_{P_p}$$

von $Z(x, y)$ für die Punkte (x, y) aus $\mathfrak{N}_n^*$ beschränkt; dasselbe gilt folglich auch für die sämtlichen Bewertungen

$$|F_\lambda^*(Z(x, y))|, \quad |F_\lambda^*(Z(x, y))|_{P_\tau} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

und

$$|F_\mu^*(Z(x, y))|, \quad |F_\mu^*(Z(x, y))|_{P_\tau} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p);$$

diese bleiben etwa unterhalb der positiven Konstanten c_4. Ist noch

$$c_5 = \min\,(|d|, |d|_{P_1}, \ldots, |d|_{P_p}),$$

so folgt aus der obigen Identität durch Übergang zu den verschiedenen Bewertungen, daß

$$\max\,(|F_\lambda(Z(x, y))|, |F_\mu(Z(x, y))|) \geqq \frac{c_5}{2c_4},$$

$$\max\,(|F_\lambda(Z(x, y))|_{P_\tau}, |F_\mu(Z(x, y))|_{P_\tau}) \geqq \frac{c_5}{2c_4} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

ist. Entsprechende Ungleichungen gelten für irgend zwei andere von den Polynomfaktoren von $F(Z)$. Daraus folgt, daß beim Durchlaufen der Folge $\mathfrak{N}_n^*$ jeweils für höchstens eine der Zahlen

$$F_1(Z(x, y)), \quad F_2(Z(x, y)), \ldots, F_l(Z(x, y))$$

der gewöhnliche Absolutbetrag oder der P_1-adische Wert oder der P_2-adische Wert, usw., oder schließlich der P_p-adische Wert kleiner als eine gewisse positive Konstante sein kann. Daraus ergibt sich, daß beim Durchlaufen der Folge $\mathfrak{N}_n^*$ zu gleicher Zeit höchstens für $p + 1$ Indizes λ der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots, l$$

das Produkt

$$|F_\lambda(Z(x, y))| \prod_{\tau=1}^{p} |F_\lambda(Z(x, y))|_{P_\tau}$$

oder, was dasselbe besagt, das Produkt

$$\left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right| \prod_{\tau=1}^{p} \left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right|_{P_\tau}$$

kleiner als eine feste positive Konstante sein kann. Ist für ein Argument $Z(x, y) = X/Y$ etwa das Produkt mit dem Index λ das kleinste, so wird wegen $\max\,(d_1, d_2, \ldots, d_l) \leqq r$

$$\left|F\left(\frac{X}{Y}\right)\right| \prod_{\tau=1}^{p} \left|F\left(\frac{X}{Y}\right)\right|_{P_\tau} \geqq c_6 \left\{\left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right| \prod_{\tau=1}^{p} \left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right|_{P_\tau}\right\}^{(p+1)r},$$

wobei c_6 eine gewisse von λ unabhängige positive Konstante ist [6]).

Für das einzelne Produkt

$$\left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right| \prod_{\tau=1}^{p} \left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right|_{P_\tau}$$

liefert jetzt der verallgemeinerte Thue-Siegelsche Satz eine untere Schranke, wenn man von den endlichvielen Elementen von $\mathfrak{N}_n^*$ absieht, für die dieses Polynom verschwindet. Es ergibt sich, wenn das irreduzible Polynom $F_\lambda(Z)$ den genauen Grad n_λ hat, daß [7])

$$\left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right| \prod_{\tau=1}^{p} \left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right|_{P_\tau} \geqq c_7 |X, Y|^{-2\sqrt{n_\lambda}}$$

---

[6]) Die in 9. gegebene Herleitung dieser Ungleichung verdanke ich Herrn Prof. Siegel; mein eigener Ansatz war umständlicher und machte Gebrauch von Eigenschaften der Teilungsgleichung der elliptischen Funktionen.

[7]) Siehe den Hauptsatz meiner Arbeit (2). Dieser bezieht sich auf Binärformen; der hier benutzte Satz über Polynome ergibt sich aber daraus auf triviale Weise. In meiner Arbeit wird vorausgesetzt, daß der Grad der Form mindestens 3 ist; ist er aber gleich 2 oder 1, so ist das hier benutzte Ergebnis ganz selbstverständlich.

ist, wobei c_7 eine gewisse positive Konstante bedeutet. Nun haben aber natürlich die Faktoren $F_\lambda(Z)$ des Polynoms $F(Z)$ vom Grad $\leqq n^2r$ erst recht einen Grad n_λ, der n^2r nicht übersteigt; also ist

$$\left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right| \prod_{\tau=1}^{p} \left|F_\lambda\left(\frac{X}{Y}\right)\right|_{P_\tau} \geqq c_7 |X, Y|^{-2n\sqrt{r}},$$

und damit folgt schließlich die Ungleichung

$$\left|F\left(\frac{X}{Y}\right)\right| \prod_{\tau=1}^{p} \left|F\left(\frac{X}{Y}\right)\right|_{P_\tau} \geqq c_6 c_7^{(p+1)r} |X, Y|^{-2(p+1)r^{3/2}n}$$

für eine unendliche Folge von Brüchen X/Y aus $\mathfrak{N}_n^*$. Andrerseits ist nach früherem

$$\left|F\left(\frac{X}{Y}\right)\right| \prod_{\tau=1}^{p} \left|F\left(\frac{X}{Y}\right)\right|_{P_\tau} \leqq c_2 |X, Y|^{-\frac{n^2r}{2h}}$$

für die Zahlen aus $\mathfrak{N}_n^*$. Ist nun die beliebige natürliche Zahl n größer als

$$4h(p+1)\sqrt{r},$$

so wird

$$\frac{n^2r}{2h} < 2(p+1)r^{3/2}n,$$

und die vorigen beiden Ungleichungen stehen für hinreichend großes $|X, Y|$ miteinander im Widerspruch.

Damit ist bewiesen, daß es keine auf C nicht identisch konstante rationale Funktion $g(x, y)$ mit rationalen Koeffizienten gibt, deren Wert in einer unendlichen Folge von rationalen Punkten (x, y) auf C einen Nenner besitzt, in dem nur die endlichvielen festgegebenen Primzahlen

$$P_1, P_2, \ldots, P_p$$

aufgehen.

Anhang.

Es soll bewiesen werden, *daß eine Kurve C vom Geschlecht Eins, deren Gleichung*

$$f(x, y) = 0$$

lauter rationale Koeffizienten hat und auf der hinreichend viele Punkte (x, y) mit rationalen Koordinaten liegen, sich durch eine birationale Transformation

$$x = \Phi(u, t), \quad y = \Psi(u, t), \quad u = \varphi(x, y), \quad t = \psi(x, y)$$

derart in eine Kurve $\mathfrak{C}$ der Gleichung

$$t^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3$$

überführen läßt, daß sowohl die Koeffizienten der rationalen Funktionen $\Phi, \Psi, \varphi, \psi$ als auch die Zahlen g_2, g_3 rational werden.

Nach bekannten Eigenschaften der Kurven vom Geschlecht Eins ist es jedenfalls immer möglich, die Kurve C durch eine birationale Transformation

$$x = \Phi'(u', t'), \quad y = \Psi'(u', t'), \quad u' = \varphi'(x, y), \quad t' = \psi'(x, y)$$

in eine Kurve $\mathfrak{C}'$ mit der Gleichung

$$t'^2 = 4u'^3 - g_2' u' - g_3'$$

zu überführen, so daß gleichzeitig ein Punkt $\mathfrak{p}_1 = (x_1, y_1)$ auf C mit rationalen Koordinaten in den unendlichfernen Punkt $u' = t' = \infty$ auf $\mathfrak{C}'$ übergeht. Sei weiter $\mathfrak{p}_2 = (x_2, y_2) \neq \mathfrak{p}_1$ ein solcher zweiter Punkt auf C mit rationalen Koordinaten, daß sein Bildpunkt (u_2', t_2') auf $\mathfrak{C}'$ nichtverschwindende Koordinaten u' und t' erhält. Alsdann gibt es eine affine Abbildung

$$t' = \lambda^3 t, \quad u' = \lambda^2 u \qquad (\lambda \neq 0 \text{ und } \neq \infty),$$

die die Kurve $\mathfrak{C}'$ in eine Kurve $\mathfrak{C}$ mit der Gleichung

$$t^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3$$

überführt, so daß gleichzeitig der Bildpunkt (u_2, t_2) von (u_2', t_2') auf der Geraden Γ mit der Gleichung

$$u = t$$

zu liegen kommt; dazu braucht man nur λ in eindeutiger Weise gleich

$$\lambda = \frac{t_2'}{u_2'}$$

zu setzen.

Eliminiert man t', u', so entsteht eine birationale Transformation

$$x = \Phi(u, t), \quad y = \Psi(u, t), \quad u = \varphi(x, y), \quad t = \psi(x, y),$$

die die Kurve C direkt in die Kurve $\mathfrak{C}$ überführt, und zwar entspricht dabei dem Punkt $\mathfrak{p}_1$ auf C der Punkt $u = t = \infty$ und dem Punkt $\mathfrak{p}_2$ auf C der Punkt (u_2, t_2) mit $u_2 = t_2$ auf der Geraden Γ. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß sowohl die Koeffizienten der rationalen Funktionen $\Phi, \Psi, \varphi, \psi$, als auch die Zahlen g_2, g_3 algebraisch sind und also etwa gleichzeitig in dem galoisschen Zahlkörper K liegen; dann müssen offenbar auch u_2 und t_2 Zahlen aus K sein.

Bedeute θ einen der Automorphismen von K. Durch Anwendung von θ auf die Koeffizienten der rationalen Funktionen $\Phi, \Psi, \varphi, \psi$ entstehen neue rationale Funktionen $\Phi^\theta, \Psi^\theta, \varphi^\theta, \psi^\theta$, durch Anwendung auf die Zahlen g_2, g_3, u_2, t_2 neue Zahlen $g_2^\theta, g_3^\theta, u_2^\theta, t_2^\theta$. Dann stellt auch

$$x = \Phi^\theta(u, t), \quad y = \Psi^\theta(u, t), \quad u = \varphi^\theta(x, y), \quad t = \psi^\theta(x, y)$$

eine birationale Transformation dar; durch sie wird C in die Kurve $\mathfrak{C}^\theta$ mit der Gleichung

$$t^2 = 4u^3 - g_2^\theta u - g_3^\theta$$

übergeführt. Dem Punkt $\mathfrak{p}_1$ muß dabei auf $\mathfrak{C}^\theta$ wieder der Punkt $u = t = \infty$ entsprechen, dem Punkt $\mathfrak{p}_2$ aber ein Punkt (u_2^θ, t_2^θ) mit $u_2^\theta = t_2^\theta$. Denn es ist nach Voraussetzung $u_2 = t_2$; diese Beziehung bleibt aber unverändert, wenn man θ anwendet.

Die beiden kubischen Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^\theta$ müssen ineinander überführbar sein mittels einer birationalen Transformation. Da die unendlichfernen Punkte beider Kurven einander entsprechen, so kann diese Transformation nur eine Affinität

$$t \to \mu^3 t, \quad u \to \mu^2 u$$

sein. Diese muß aber gleich der Identität sein, denn es entsprechen einander die beiden Punkte (u_2, t_2) und (u_2^θ, t_2^θ) mit $u_2 = t_2$ und $u_2^\theta = t_2^\theta$. Also stimmen die beiden Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^\theta$ überein.

Daraus folgt erstens, daß die Invarianten g_2 und g_3 von den Automorphismen θ nicht geändert werden; also sind sie rationale Zahlen. Zweitens ergibt sich, daß die birationalen Transformationen

$$x = \Phi^\theta(u, t), \quad y = \Psi^\theta(u, t), \quad u = \varphi^\theta(x, y), \quad t = \psi^\theta(x, y)$$

unabhängig von θ jedem Punkt (x, y) denselben Punkt (u, t) zuordnen. Also sind sie alle identisch und auch identisch mit der Transformation

$$x = \frac{1}{k}\sum_\theta \Phi^\theta(u, t), \quad y = \frac{1}{k}\sum_\theta \Psi^\theta(u, t), \quad u = \frac{1}{k}\sum_\theta \varphi^\theta(x, y), \quad v = \frac{1}{k}\sum_\theta \psi^\theta(x, y),$$

wo die Summen über alle Automorphismen von K erstreckt werden und k die Anzahl dieser Automorphismen bedeutet. Hier steht aber nach den bekannten Sätzen über

symmetrische Funktionen jetzt wirklich eine birationale Transformation, die durch rationale Funktionen mit rationalen Koeffizienten vermittelt wird; der behauptete Satz ist also wahr [8]).

Göttingen 17. 2. 33.

[8]) Dieser Beweis ist einem entsprechenden Beweis für Kurven vom Geschlecht Null in der Siegelschen Arbeit (1), S. 50, nachgebildet.

Eingegangen 26. Februar 1933.

Anmerkung der Redaktion.

Der im Anhang gegebene Beweis läßt sich durch einen einfacheren und weitertragenden auf Grund der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen ersetzen. Es genügt, die Existenz *mindestens eines* rationalen Punktes vorauszusetzen. Außerdem kann der Koeffizientenkörper k ein beliebiger vollkommener Körper mit von 2 und 3 verschiedener Charakteristik p ($= 0$ oder Primzahl) an Stelle des Körpers der rationalen Zahlen sein.

Sei also K ein Körper algebraischer Funktionen einer Unbestimmten vom Geschlecht $g = 1$ über einem solchen Koeffizientenkörper k, und besitze K mindestens einen „in k rationalen Punkt", d. h. Primdivisor $\mathfrak{P}$ vom Grade 1. Wie F. K. Schmidt [1]) bewiesen hat, gilt für K (sogar bei *beliebigem* Geschlecht g und vollkommenem k *beliebiger* Charakteristik p) der Riemann-Rochesche Satz [1]). Bei $g = 1$ gibt es danach für jeden Divisor $\mathfrak{D}$ positiven Grades n genau n bezgl. k linear unabhängige ganze Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{D}}$ in K. Insbesondere existiert also in K ein von 1 linear unabhängiges ganzes Multiplum x_0 von $\frac{1}{\mathfrak{P}^2}$ und ein von 1, x_0 linear unabhängiges ganzes Multiplum y_0 von $\frac{1}{\mathfrak{P}^3}$, und diese Multipla liegen genau bis auf Transformationen

$$x = ax_0 + a', \qquad y = by_0 + b'x_0 + b''$$

mit beliebigen $a \neq 0$, $b \neq 0$, a', b', b'' aus k fest. Ferner sind $1, x, x^2, x^3, y, xy$ dann das volle System der 6 linear unabhängigen ganzen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{P}^6}$. Das ganze Multiplum y^2 von $\frac{1}{\mathfrak{P}^6}$ ist also linear über k aus $1, x, x^2, x^3, y, xy$ komponierbar. Wegen $p \neq 2$ können b' und b'' (eindeutig) so normiert werden, daß y^2 schon aus $1, x, x^2, x^3$ (ohne y, xy) linear komponierbar ist, und wegen $p \neq 3$ kann a' (eindeutig) so normiert werden, daß y^2 schon aus $1, x, x^3$ (ohne x^2) linear komponierbar ist. Schließlich kann wegen $p \neq 2$ die Normierung von a, b so gegeneinander ausgeglichen werden, daß diese Abhängigkeit lautet:

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

mit g_2, g_3 aus k, und man sieht überdies, daß die so gewonnenen x, y, g_2, g_3 bis auf die Homogenitätstransformationen

$$x' = c^2 x, \quad y' = c^3 x, \quad g_2' = c^4 g_2, \quad g_3' = c^6 g_3$$

eindeutig durch $\mathfrak{P}$ bestimmt sind. Das Abelsche Theorem (Additionstheorem) lehrt dann noch, daß sie auch für jeden anderen Primdivisor 1. Grades $\mathfrak{Q}$ von K dieselben sind.

H. Hasse.

[1]) Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Zeitschr. **33** (1931).

Beiträge zur Theorie gewisser Integraltypen.

Von *Erik Svenson* in Riga.

Einleitung.

Die im folgenden untersuchten Integraltypen sind vornehmlich von Hellinger in die mathematische Literatur eingeführt worden. Als Grundlage vorliegender Arbeit seien die Hauptergebnisse der einschlägigen Untersuchungen von Hellinger [1]) und Hahn [2]), soweit sie hier in Frage kommen, kurz zusammengestellt.

Resultate von Hellinger.

Definition. Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei im Intervall (a, b) stetige, eindeutige Funktionen, $g(x)$ außerdem monoton wachsend [3]). Existiert dann in diesem Intervall der im Sinne eines bestimmten Integrales zu verstehende, von der Art des Grenzüberganges unabhängige Grenzwert $\lim_{\Delta \to 0} \sum \frac{\Delta f^2}{\Delta g}$, so wird er durch $\int_a^b \frac{df^2}{dg}$ bezeichnet [4]). Dieser Integraltypus besitzt folgende grundlegende Eigenschaften.

a) Das Integral $\int_a^b \frac{df^2}{dg}$ existiert im ganzen Intervall (a, b) und in jedem Teilintervall, wenn es eine weitere stetige, eindeutige, monotone Funktion $\varphi(x)$ derart gibt, daß für jedes Teilintervall Δ von (a, b) die Ungleichung $\Delta f^2 \leqq \Delta g \, \Delta \varphi$ gilt; es ist dann $\int_\Delta \frac{df^2}{dg} \leqq \Delta \varphi$ [5]).

Umgekehrt: Existiert das Integral, so ist es eine stetige, monotone Funktion der oberen Grenze, $\int_a^x \frac{df^2}{dg} = h(x) - h(a)$, und es gilt $\Delta f^2 \leqq \Delta g \, \Delta h$, wobei $h(x)$ die am langsamsten wachsende Funktion ist, die dieser Beziehung genügt und monoton wächst: $\Delta h \leqq \Delta \varphi$. $f(x)$ ist notwendig von beschränkter Schwankung.

Eventuelle Konstanzintervalle $\Delta g = 0$, in denen auch $\Delta f = 0$ sein muß, sind in dem Integral nicht zu berücksichtigen. Es kann ihrer höchstens abzählbar unendlich viele geben.

Der Grenzwert $\int_\Delta \frac{df^2}{dg}$ wird von unten her erreicht, weil bei der Intervallunterteilung die Summe $\sum \frac{\Delta f^2}{\Delta g}$ nicht abnimmt.

---

[1]) Hellinger, Dissertation, Göttingen 1907, im folgenden zitiert mit „Diss."

[2]) Hahn, Über die Integrale des Herrn Hellinger usw., Monatshefte für Math. u. Phys. **23** (1912), S. 161.

[3]) Im folgenden wird unter monoton immer monoton wachsend verstanden.

[4]) Δf^2 bzw. df^2 soll stets $(\Delta f)^2$ bzw. $(df)^2$ bedeuten.

[5]) Siehe Diss., S. 25f.

Sind $f(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbar, so geht das Integral in ein Riemannsches über:

$$\int_a^b \frac{df^2}{dg} = \int_a^b \frac{f'^2(x)}{g'(x)}\,dx.$$

Der Einfachheit halber kann die untere Grenze des Integrales gleich Null gesetzt werden, ebenso $h(0) = 0$; man kann auch $g(0) = 0$ und $f(0) = 0$ annehmen, da es auf konstante Zusatzglieder nicht ankommt.

Zusammen mit $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ existiert wegen $\Delta f^2 \leqq \Delta g\, \Delta h$ auch $\int_0^x \frac{df^2}{dh} \leqq g(x)$, indessen kann hier im allgemeinen auch das Ungleichheitszeichen stehen. Besteht das Gleichheitszeichen, so soll das Integral $\int_0^x \frac{df^2}{dg}$ *umkehrbar* heißen.

Sind die Funktionen stetig differenzierbar, so ist das Integral umkehrbar.

b) Damit $h(x)$ durch ein Integral eines Quadrates mit dem Nenner $g(x)$ dargestellt werden kann, also $h(x) = \int_0^x \frac{df^2}{dg}$ gilt, ist notwendig und hinreichend, daß *jeder Nullmenge der g-Achse durch die Beziehungen* $g = g(x)$, $h = h(x)$ *eine Nullmenge der h-Achse entspricht* [1]).

Da im folgenden letztere Verknüpfung der beiden stetigen, monotonen Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ eine große Rolle spielt, werde sie kurz als die $0(g) \to 0(h)$ Aussage bezeichnet. Man beachte ihre Unsymmetrie; dagegen ist sie reflexiv und transitiv.

Damit $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ umkehrbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß auch umgekehrt $0(h) \to 0(g)$ gilt.

c) Die Beziehnung $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ ist bei gegebenen $g(x)$ und $h(x)$ stets in bezug auf die Funktion $f(x)$ auflösbar; als *monotone* Funktion ist $f(x)$ bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt [2]).

Resultate von Hahn.

Hahn führt mit Hilfe der Substitution $x = x(g)$ den Hellingerschen Integraltypus auf ein Lebesguesches Integral zurück. Hellinger kommt bei der Untersuchung seines verhältnismäßig einfachen, auf der gewöhnlichen Intervallunterteilung beruhenden Integraltypus mit entsprechend einfachen Hilfsmitteln aus, d. h. solchen, die nicht die Heranziehung der höher transzendenten Prozesse erfordern, die bei der Bildung des Lebesgueschen Integralbegriffs auftreten. Andererseits aber wird die gesamte Theorie dieser Integrale durch die Benutzung der höheren Hilfsmittel weitaus durchsichtiger, da für die Beweise nicht spezielle, ad hoc konstruierte Überlegungen erforderlich sind, sondern bekannte, allgemeine Eigenschaften der Lebesgueschen Integrale, auf diesen Fall angewendet, die gewünschten Resultate ergeben, die sich oft auch einfacher formulieren lassen. Insbesondere zeigt sich dieses in der Verwendung des bei Hellinger nicht vorkommenden Ableitungsbegriffes. In dieser Arbeit wird die Methode von Hahn befolgt.

[1]) Siehe Diss., S. 50.

[2]) Siehe Diss., S. 34f.

Gegenüber der Substitution $x = x(g)$ ist das Integral invariant, obgleich sie abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen entsprechend den Konstanzintervallen von $g(x)$ haben kann, d. h.

$$\int_0^x \frac{df^2}{dg} = \int_0^g \frac{df^2}{dg} = h(g)\ ^{1}).$$

d) Damit $\int_a^b \frac{df^2}{dg}$ existiere, ist notwendig und hinreichend, daß $f(g)$ das unbestimmte Integral einer in dem (a, b) entsprechenden Intervalle (A, B) samt ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrierbaren [2]) Funktion $\varphi(g)$ sei. Abgesehen von einer Nullmenge hat man dann in (A, B) $f'(g) = \varphi(g)$, und es ist

$$\int_a^b \frac{df^2}{dg} = \int_A^B f'^2(g)\,dg\ ^{3}).$$

Hilfssätze.

Die Tatsache, daß zur Existenz von $\int_a^b \frac{df^2}{dg}$ $f(g) = f(A) + \int_A^g f'(g)dg$, also $f(g)$ *totalstetig* sein muß, gibt dazu Anlaß anzunehmen, daß der Begriff der Totalstetigkeit einer Funktion in der Theorie der Hellingerschen Integrale eine wichtige Rolle spielen wird. Daher möge zunächst der Zusammenhang dieser Eigenschaft mit den sonst hier auftretenden Begriffsbildungen angegeben werden.

Eine totalstetige Funktion ist notwendig stetig und von beschränkter Schwankung, also fast überall (d. h. höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null) differenzierbar [4]). Es gibt indes stetige Funktionen von beschränkter Schwankung (sogar monotone), die nicht totalstetig sind, wie schon die Existenz der singulären Funktionen lehrt [5]).

Sind zwei monotone, stetige Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ gegeben, so erfordert die $0(g) \to 0(h)$ Aussage die Stetigkeit der ebenfalls monotonen Funktion $h(g)$, was im allgemeinen nicht erfüllt zu sein braucht. Denn eine monotone Funktion kann als Unstetigkeiten bekanntlich nur Sprünge haben. Liegt ein solcher vor, so ist aber die $0(g) \to 0(h)$ Aussage nicht erfüllt, da $h(x)$ sich stetig ändern sollte. Es interessieren also hier in erster Linie die *stetigen* monotonen Funktionen $h(g)$.

Hilfssatz 1. *Für eine monotone, stetige Funktion $h(g)$ sind die drei Aussagen: a) Totalstetigkeit, b) $h(g)$ ist unbestimmtes Integral und c) $0(g) \to 0(h)$ gleichbedeutend* [6]).

Läßt man stetige Funktionen von beschränkter Schwankung $f(g)$ zu, so sind a) und b) immer noch gleichbedeutend [7]). Die $0(g) \to 0(h)$ Aussage muß aber in die $0(g) \to 0(\bar{f})$ Aussage abgeändert werden, wo $\bar{f}(g) = \int_0^g |df|$ die Gesamtschwankung von $f(g)$ bedeutet. $\bar{f}(g)$ ist stetig, monoton und zusammen mit $f(g)$ auch totalstetig [8]).

[1]) Um im folgenden die Schreibweise zu vereinfachen, wird hier entgegen dem üblichen Gebrauch bei Wechsel des Argumentes das Funktionszeichen nicht gewechselt, also z. B. $h(x) = h[x(g)] = h(g)$ geschrieben. Deswegen ist zu beachten, daß das Funktionssymbol je nach dem Argument eine verschiedene Bedeutung hat.

[2]) Alle in gewöhnlicher Form fernerhin angegebenen Integrale sind im Lebesgueschen Sinne zu verstehen.

[3]) Siehe Hahn, a. a. O., S. 172.

[4]) Siehe Carathéodory, Reelle Funktionen, Leipzig u. Berlin 1918, S. 514 u. 589.

[5]) Vgl. Schlesinger und Plessner, Lebesguesche Integrale, Berlin u. Leipzig 1926, S. 160; auch die später vorkommende monotone, stetige Funktion $g(\chi)$ ist nicht totalstetig (siehe S. 185).

[6]) Siehe Carathéodory, a. a. O., S. 583, und Hahn, a. a. O., S. 163.

[7]) Vgl. Schlesinger, a. a. O., S. 140 u. 162.

[8]) Siehe Schlesinger, a. a. O., S. 164.

Hilfssatz 2. *Falls für die stetige, monotone Funktion $h(g)$ die $0(g) \to 0(h)$ Aussage gilt, so ist die größte meßbare Menge M der g-Achse, der eine Nullmenge auf der h-Achse entspricht, bis auf eine Nullmenge identisch mit der Menge C, auf der $h'(g) = 0$ ist.*

M ist überhaupt nur bis auf eine Nullmenge bestimmt. Hellinger nennt M die Konstanzmenge der Funktion $h(g)$ [1]).

Beweis. Entspricht einer Menge der g-Achse eine Nullmenge der h-Achse, so ist jene entweder selbst meßbar oder es gibt eine umfassendere meßbare Menge, der ebenfalls eine Nullmenge der h-Achse entspricht, nämlich eine Menge, die die ursprüngliche Nullmenge umfaßt [2]). Deshalb kann man die größte Menge, der eine Nullmenge der h-Achse entspricht, als meßbar voraussetzen.

$h'(g)$ ist als integrable Funktion meßbar, daher ist die Menge C, für welche $h'(g) = 0$ ist, auch meßbar [3]). Nach einem Satz von Hahn [4]) entspricht wegen $0(g) \to 0(h)$ jeder meßbaren Menge N der g-Achse eine meßbare Menge der h-Achse, und zwar ist ihr Inhalt gleich $\int_N h'(g)\,dg$. Es ist in der Bezeichnungsweise von Hellinger $\int_N h'(g)\,dg = \int_N dh$ [5]). Danach entspricht der meßbaren Menge C, für welche $h'(g)$ verschwindet, eine Menge vom Maße Null, d. h. C ist in M enthalten. Gäbe es eine umfassendere, d. h. nicht nur um eine Nullmenge größere, meßbare Menge M', der ebenfalls eine Nullmenge entspricht, so wäre $\int_{M'} h'(g)\,dg = 0$, desgleichen für jede Teilmenge im Intervall $(0, g)$. Danach wäre nach einem allgemeinen Satz [6]) fast überall auf M' $h'(g) = 0$ entgegen der Annahme. Daraus folgt, daß M mit der Menge C bis auf eine Nullmenge übereinstimmt.

Hilfssatz 3. *Damit für $h(g)$ mit $0(g) \to 0(h)$ auch die umgekehrte Aussage $0(h) \to 0(g)$ gilt, ist notwendig und hinreichend, daß $h'(g)$ höchstens auf einer Nullmenge verschwindet.*

Beweis. Es sei $h'(g) = 0$ auf einer Nullmenge. Es genügt nachzuweisen, daß keiner Nullmenge der h-Achse eine meßbare Menge mit von Null verschiedenem Inhalt der g-Achse entspricht [7]). Gäbe es eine solche meßbare Menge der g-Achse, so wäre nach dem vorigen fast überall auf ihr $h'(g) = 0$ gegen die Annahme. Also besteht $0(h) \to 0(g)$. Umgekehrt, wenn $0(h) \to 0(g)$ gilt, so ist die Menge, wo $h'(g)$ verschwindet, nur eine Nullmenge, weil sie einer Nullmenge der h-Achse entspricht.

Hilfssatz 4. *$h(g)$ sei eine stetige, monotone Funktion, für die die $0(g) \to 0(h)$ Aussage gilt; ferner sei $f(h)$ eine totalstetige Funktion. $f(g)$ ist dann auch totalstetig, und es gilt die Beziehung*

$$f'(h)\,h'(g) = f'(g)$$

fast überall auf der g-Achse [8]), wo unter $f'(h)\,h'(g)$ Null zu verstehen ist, wenn $h'(g) = 0$ ist und $f'(h)$ gar nicht existieren sollte. Ferner gilt

$$\int_0^h \varphi(h)\,dh = \int_0^g \varphi(h)\,h'(g)\,dg$$

für jede integrable Funktion $\varphi(h)$ [9]).

---

[1]) Siehe Diss., S. 44f.
[2]) Vgl. Hahn, a. a. O., S. 167f., wo ein Verfahren zur Bildung einer solchen meßbaren Menge angegeben wird.
[3]) Vgl. Schlesinger, a. a. O., S. 95.
[4]) Siehe Hahn, a. a. O., S. 165.
[5]) Siehe Diss., S. 39.
[6]) Siehe Schlesinger, a. a. O., S. 122.
[7]) Siehe Hahn, a. a. O., S. 164.
[8]) D. h. hier und im folgenden stets: im in Frage kommenden Intervall.
[9]) Siehe Hahn, a. a. O., S. 167f.

Weitere Untersuchungen zur Frage der Umkehrbarkeit des Integrales

$$\int_0^x \frac{df^2}{dg}.$$

Satz 1. *Existiert* $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ *und ist* $f(x)$ *monoton, so ist zur Umkehrbarkeit des Integrales notwendig und hinreichend, daß* $0(f) \to 0(g)$ *gilt* [ebenso gut wie früher $0(h) \to 0(g)$].

Denn man hat $0(g) \to 0(f)$, $0(g) \to 0(h)$ und $\int_0^g f'^2(g)\,dg = h(g)$, also fast überall in g $f'^2(g) = h'(g)$. Folglich ist $f'(g) = 0$ nur auf derselben Menge C, wo $h'(g) = 0$ ist, bis auf eine Nullmenge. Ist das Integral umkehrbar, also $0(h) \to 0(g)$, so ist nach dem Hilfssatz 3 C höchstens eine Nullmenge, daher gilt ebenfalls $0(f) \to 0(g)$ und der Schluß läßt sich auch umkehren.

Dagegen ist zur Existenz von $\int_0^x \frac{df^2}{dg}$, $f(x)$ monoton, wohl notwendig, daß $0(g) \to 0(f)$ gilt, aber nicht hinreichend. Es muß nach d) S. 181 noch $f'^2(g)$ integrierbar sein, und wenn $f'(g)$ nicht beschränkt ist, braucht das nicht der Fall zu sein [1]).

Zusatz. *Für* $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ *gilt bei monotonem* $f(x)$ *stets* $0(f) \rightleftarrows 0(h)$.

Das erkennt man leicht durch Betrachtung der Menge C.

Ist $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ nicht umkehrbar, also $\int_0^x \frac{df^2}{dh} = \chi(x) \neq g(x)$, so beweist Hellinger, daß $\chi(g)$ Inhaltsfunktion einer auf das Intervall $(0, g)$ entfallenden Teilmenge einer meßbaren Menge ist [2]). Im Rahmen der Verwendung der Lebesgueschen Integraltheorie drückt sich dieser Sachverhalt folgendermaßen aus:

Satz 2. *Ist ein nicht umkehrbares Integral* $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ *vorgegeben, also* $\int_0^x \frac{df^2}{dh} = \chi(x) \neq g(x)$, *so ist auf der Konstanzmenge* C *der Funktion* $h(g)$ *auch* $\chi'(g) = 0$, *sonst aber fast überall in* g $\chi'(g) = 1$. *Für die Funktion* $\chi(g)$ *besteht ferner die Beziehung*:

$$\int_0^x \frac{d\chi^2}{dg} = \chi(x);$$

sie liefert also ein nicht umkehrbares Integral von besonders einfacher Art.

$\int_0^x \frac{d\chi^2}{dg}$ existiert, da nach a) S. 179 $\Delta\chi \leqq \Delta g$, also $\Delta\chi^2 \leqq \Delta g\,\Delta\chi$ ist.

Zunächst hat man nach dem Hilfssatz 4, da $0(g) \to 0(h)$ besteht,

$$\chi(h) = \int_0^h f'^2(h)\,dh = \int_0^g f'^2(h)\,h'(g)\,dg,$$

und es gilt fast überall in g

[1]) Vgl. Schlesinger, a. a. O., S. 213.

[2]) Siehe Diss., S. 50.

$$f'(h)\,h'(g) = f'(g)\,,$$

also

$$\chi(g) = \int_0^g f'(h)\,f'(g)\,dg$$

und

$$\chi'(g) = f'(h)\,f'(g)\,.$$

Auf C ist $f'(g) = 0$, daher auch stets $\chi'(g) = 0$. Ist umgekehrt $\chi'(g) = 0$, so muß entweder $f'(g) = 0$ oder $f'(h) = 0$ sein; letzteres zieht aber auch $f'(g) = 0$ nach sich, so daß die Mengen, für die $f'(g) = 0$ bzw. $\chi'(g) = 0$ ist, identisch untereinander und mit C sind. (Unterschiede um eine Nullmenge sind stets zugelassen.)

$f'(h)$ existiert fast überall in h, $f'(g)$ und $g'(h)$ ebenfalls wegen $0(g) \to 0(h)$, so daß man für die h-Achse ähnlich wie in Hilfssatz 4 fast überall $f'(g)\,g'(h) = f'(h)$ hat. Dieser Menge der h-Achse entspricht auf der g-Achse eine Menge D, die bis auf eine Nullmenge mit der Komplementärmenge zu C der g-Achse übereinstimmt; denn auf C gilt obige Beziehung nicht. Auf der Menge D gilt also sowohl $f'(h)\,h'(g) = f'(g)$, wie auch $f'(g)\,g'(h) = f'(h)$, woraus zusammen $h'(g)\,g'(h) = 1$ folgt, weil auf ihr $f'(g)\,f'(h) = \chi'(g) \neq 0$ ist. Letzteres hätte man auf elementarem Wege auch direkt zeigen können. Die Mengen, auf denen $h'(g)$ oder $f'(g)$ unendlich werden, sind höchstens vom Inhalt Null [1]). Sie werden aus D ausgeschieden.

Die Mengen C und D sind keine Nullmengen; C nicht, weil sonst gegen die Annahme $\chi(x) = g(x)$ wäre, und D nicht, weil sonst $\chi(x) = 0$, also wegen $\Delta f^2 \leqq \Delta h\,\Delta\chi$ $\Delta f = 0$, d. h. $f(x)$ konstant wäre, welcher Fall als trivial ausscheidet.

Auf D hat man nun

$$\chi'(g) = f'(g)\,f'(h) = f'^2(g)\,g'(h) = h'(g)\,g'(h) = 1\,.$$

Also ist

$$\chi(g) = \int_0^g \chi'(g)\,dg = \int_D^{0,g} dg\,,$$

wo das Integral über den Durchschnitt von D und $(0, g)$ zu erstrecken ist. D. h. $\chi(g)$ ist der Inhalt der auf das Intervall $(0, g)$ fallenden Teilmenge von D. Entsprechend dem Bau von $\int_0^x \frac{df^2}{dh}$ kann man schreiben:

$$\chi(g) = \int_D^{0,g} \frac{f'^2(g)}{h'(g)}\,dg\,.$$

Auf C gilt allerdings nichts Ähnliches, der zugehörige Integralanteil verschwindet.

Endlich ist, weil $\chi'(g) = 0$ oder 1 ist und $0(g) \to 0(\chi)$ gilt,

$$\int_0^x \frac{d\chi^2}{dg} = \int_0^g \chi'^2(g)\,dg = \int_0^g \chi'(g)\,dg = \chi(x),\ \text{w. z. b. w.}$$

Man kann das letzte Resultat auch direkt durch eine formale Beweismethode erschließen, die später eine Rolle spielt:

$$\int_0^x \frac{d\chi^2}{dg} = \int_0^g \frac{(d\int_0^h f'^2(h)\,dh)^2}{dg} = \int_0^g \frac{(d\int_0^g f'^2(h)\,h'(g)\,dg)^2}{dg}$$

$$= \int_0^g (f'^2(h)\,h'(g))^2\,dg = \int_0^g f'^2(h)\,f'^2(g)\,dg = \int_0^g f'^2(h)\,h'(g)\,dg = \int_0^h f'^2(h)\,dh = \chi(x)\,,$$

da $0(g) \to 0(h)$ gilt. Daraus kann man umgekehrt zu obigem zeigen, daß $\chi'(g)$ entweder gleich 0 oder 1 sein muß.

[1]) Vgl. Schlesinger, a. a. O., S. 85.

Hieraus erkennt man, daß alle monotonen Funktionen $h(g)$ (die nach c) S. 180 $f(g)$ im wesentlichen bestimmen), die dieselbe Konstanzmenge C haben, das gleiche $\chi'(g)$ und damit das gleiche $\chi(g)$ liefern. Unter diesen Funktionen ist $\chi(g)$ selbst die einfachste, weil für sie auf D $\chi'(g) = 1$ ist, während $h'(g)$ beliebig sein kann.

Ferner erkennt man hieraus, wie man beliebige nicht umkehrbare Integrale $\int_0^x \frac{df^2}{dg}$ herstellen kann. Man hat dazu eine beliebige meßbare Teilmenge D des Intervalles $(0, 1)$ zu wählen und ihr die Inhaltsfunktion $\chi(g)$ des Durchschnitts von D und $(0, g)$ zuzuordnen. Für diese gilt $\chi'(g) = 1$ auf D und $\chi'(g) = 0$ auf der Komplementärmenge C. Sodann kann man zu einer beliebig vorgegebenen positiven, integrablen Funktion $\varphi(g)$, die auf C verschwindet, die weitere Funktion $h(g) = \int_0^g \varphi(g)\, dg$ angeben. $f(g)$ ist dann, wie erwähnt, durch $h(g)$ bestimmt. Somit ist das nicht umkehrbare Integral $\int_0^g \frac{df^2}{dg}$ gewonnen, in dem man noch durch eine monotone, stetige Funktion eine Substitution $g = g(x)$ ausführen kann.

Nimmt man $\chi'(g)$ als $\varphi(g)$, so wird $h(g) = \chi(g)$. Als $f(g)$ kann dann ebenfalls $\chi(g)$ dienen: $\int_0^g \frac{d\chi^2}{dg} = \chi(g)$. Die Funktion $\chi(g)$ kann also als Repräsentant einer Funktionsklasse angesehen werden, die nicht umkehrbare Integrale liefert. Im wesentlichen gibt es keine weiteren derartigen Funktionen.

Trivial, aber zulässig, wäre das Beispiel $\chi = g$ für $g \leqq g_0$, $\chi = g_0$ für $g \geqq g_0$. Hellinger gibt ein erstes nicht triviales Beispiel in der Funktion $J(x)$ an [1]). Bei ihm dient als Menge D eine der aus den Grundelementen der Mengenlehre bekannten triadischen Intervallmengen, deren Komplementärmenge perfekt ist.

Die Funktion $J(x)$, wie jede χ-Funktion, eignet sich außerordentlich gut zur Angabe von Beispielen dessen, was im Gebiet der Hellingerschen Integrale überhaupt für Besonderheiten auftreten können.

Die Umkehrfunktion $g(\chi)$ ist, falls $\chi(g)$ keine Konstanzintervalle enthält, ebenfalls monoton und stetig, aber nicht totalstetig, da $\chi'(g) = 0$ auf einer Nichtnullmenge C ist und $0(\chi) \to 0(g)$ nicht gilt [2]). Als Beispiel kann $x(J)$ dienen. Daher existiert $\int_0^x \frac{dx^2}{dJ}$ nicht.

Es gilt $\int_0^x \frac{d\varphi^2}{dg} = \int_0^x \frac{d\varphi^2}{d\chi}$ für jede Funktion $\varphi(x)$, für die das rechte Integral und damit wegen $\Delta\chi \leqq \Delta g$ auch das linke existiert.

Man hat nämlich

$$\int_0^x \frac{d\varphi^2}{dg} = \int_0^g \varphi'^2(g)\, dg = \int_0^g \varphi'^2(\chi)\, \chi'^2(g)\, dg\,,$$

$$\int_0^x \frac{d\varphi^2}{d\chi} = \int_0^\chi \varphi'^2(\chi) d\chi = \int_0^g \varphi'^2(\chi)\, \chi'(g)\, dg\,,$$

[1]) Siehe Diss., S. 36 u. 47.

[2]) Vgl. die Anmerkung 5 auf S. 181.

beides nach Hilfssatz 4, da nach der Voraussetzung $\varphi(x)$ totalstetig und $0(g) \to 0(\chi)$ ist. Berücksichtigt man nun den Wertevorrat der Funktion $\chi(g)$, so folgt die behauptete Gleichheit.

Satz 3. *Damit* $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ *umkehrbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß fast überall auf der g-Achse* $\lim_{\Delta \to 0} \vartheta = 1$ *ist, wo* $\vartheta = \frac{\Delta f^2}{\Delta g \, \Delta h}$ *gesetzt ist* $(\vartheta \leqq 1)$.

Es sei das Integral umkehrbar. Es ist fast überall in g $f'^2(g) = h'(g)$, also $\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta f^2}{\Delta g^2} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta g}$.

Nach der Voraussetzung ist wegen b) S. 180 und Hilfssatz 3 $h'(g) = 0$ höchstens auf einer Nullmenge. Da also der gemeinsame Grenzwert fast überall existiert und von Null und ∞ verschieden ist, so hat auch der Quotient $\frac{\Delta f^2}{\Delta g^2} : \frac{\Delta h}{\Delta g} = \vartheta$ fast überall einen Grenzwert, und zwar ist dieser gleich 1.

Überall in g braucht $\lim_{\Delta \to 0} \vartheta$ nicht gleich 1 zu sein, wie das Beispiel zeigt: $y = x^2$, $z = \int_0^1 \frac{dy^2}{dx} = \frac{4}{3} x^3$. Dieses Integral ist umkehrbar, weil alle Funktionen stetig differenzierbar sind. $z'(x) = 4x^2$ verschwindet nur bei $x = 0$. An dieser Stelle ist aber $\lim_{\Delta \to 0} \vartheta = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x \cdot \frac{4}{3} x^3} = \frac{3}{4} \neq 1$.

Nun sei andererseits $\lim_{\Delta \to 0} \vartheta = 1$ fast überall in g. Es werde ein δ vorgegeben. Die Nullmenge, auf der vielleicht $\lim_{\Delta \to 0} \vartheta \neq 1$ ist oder nicht existiert, werde in eine Intervallmenge N eingeschachtelt, deren Gesamtlänge $\sum_N \Delta g < \delta$ sei. Das ist für jedes δ möglich. Sodann gilt auf der übrigbleibenden Menge M, die man als abgeschlossen ansehen kann, überall $\vartheta \to 1$, falls $\Delta \to 0$. Folglich strebt nach dem Borelschen Überdeckungssatz ϑ in x gleichmäßig nach 1. Man kann zu δ ein und dasselbe Δ angeben, so daß überall in M $1 - \vartheta < \delta$ ist. M wird dann in Teile der Größe Δ zerlegt, so daß man eine Intervalleinteilung angeben kann, für die

$$g - \sum \frac{\Delta f^2}{\Delta h} = \sum \left(\Delta g - \frac{\Delta f^2}{\Delta h} \right) = \sum \Delta g (1 - \vartheta) \leqq \sum_M \Delta g (1 - \vartheta) + \sum_N \Delta g < \delta \cdot \sum \Delta g + \delta = \delta \cdot \text{const.}$$

gilt. Daraus folgt, daß man für eine geeignet gewählte Einteilungsfolge den Grenzwert g für die Summe $\sum \frac{\Delta f^2}{\Delta h}$ erhält. Da aber die Existenz des Integrales $\int_0^x \frac{df^2}{dh}$ schon bekannt ist, so gilt:

$$\int_0^x \frac{df^2}{dh} = g(x).$$

Zusatz. *Ist* $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ *nicht umkehrbar, so ist doch immerhin* $\lim_{\Delta \to 0} \vartheta = 1$ *fast überall auf der h-Achse.*

Denn die Menge der g-Achse, auf der $h'(g) = 0$ ist, liefert auf der h-Achse eine Nullmenge (selbstverständlich auch die Nullmenge, wo $h'(g) = \infty$ ist oder nicht existiert). Das entspricht der Tatsache, daß in h fast überall $f'(g)\, f'(h) = 1$ ist; D entspricht eben fast dem ganzen h-Intervall.

Wie oben läßt sich dann auch der Grenzübergang in der Summe

$$h - \sum \frac{\Delta f^2}{\Delta g} = \sum \Delta h (1 - \vartheta)$$

vollziehen, wenn man in h rechnet. Das Resultat $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ ist natürlich trivial.

Falls $f(x)$ monoton ist, so ist aus demselben Grunde $\lim_{\Delta \to 0} \vartheta = 1$ fast überall auf der f-Achse (vgl. Satz 1).

Der anschließende Integraltypus $\int_a^b \frac{df\, df_1}{dg}$.

Neben dem Grundintegral $\int_a^b \frac{df^2}{dg}$ führt Hellinger einen anschließenden Integraltypus $\int_a^b \frac{df\, df_1}{dg}$ ein und zeigt, daß, falls $\int_a^b \frac{df^2}{dg}$ und $\int_a^b \frac{df_1^2}{dg}$ existieren, er in demselben Sinn ebenfalls existiert und daß ferner für jedes Teilintervall Δ die Beziehung

$$\left(\int_\Delta \frac{df\, df_1}{dg}\right)^2 \leqq \int_\Delta \frac{df^2}{dg} \cdot \int_\Delta \frac{df_1^2}{dg}$$

besteht, die man als ein Analogon zur bekannten Schwarzschen Ungleichung im Gebiet der Hellingerschen Integrale bezeichnen kann [1]). Aus ihr folgt, daß $\int_a^x \frac{df\, df_1}{dg}$ eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung der oberen Grenze ist.

Hahn führt wiederum durch die Substitution $x = x(g)$ auch diesen Integraltypus auf ein Lebesguesches Integral zurück [2]) (vgl. S. 180):

$$\int_a^b \frac{df\, df_1}{dg} = \int_A^B f'(g)\, f_1'(g)\, dg\,.$$

Danach ist $\int_A^g \frac{df\, df_1}{dg}$ eine totalstetige Funktion von g.

Satz 4. *Sind* $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ *und* $\int_0^x \frac{df_2^1}{dg} = h_1(x)$ *umkehrbar, so ist fast überall auf der* g*-Achse* $\lim_{\Delta \to 0} \bar{\vartheta} = 1$ *und* $\lim_{\Delta \to 0} \vartheta' = 1$, *wo* $\bar{\vartheta} = \frac{\Delta f\, \Delta f_1}{\Delta g\, \Delta \varrho}$, $\vartheta' = \frac{\Delta \varrho^2}{\Delta h\, \Delta h_1}$ *und* $\varrho(x) = \int_0^x \frac{df\, df_1}{dg}$ *ist.*

---

[1]) Siehe Diss., S. 30, und dieses Journal **136** (1909), S. 237.

[2]) Siehe Hahn, a. a. O., S. 180f.

Es ist $\varrho(g) = \int_0^g f'(g)\, f_1'(g)\, dg$, also fast überall in g $\varrho'(g) = f'(g)\, f_1'(g)$, d. h.

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta \varrho}{\Delta g} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta g}\,.$$

Wegen der Voraussetzung sind die Grenzwerte $f'(g)$ und $f_1'(g)$ fast überall von Null verschieden (siehe Satz 1), folglich kann man den Grenzwert des Quotienten bilden und hat damit

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta f\, \Delta f_1}{\Delta g\, \Delta \varrho} = 1\,.$$

Quadriert man diese Beziehung und kombiniert sie mit $\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta f^2}{\Delta g\, \Delta h} = 1$ und $\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta f_1^2}{\Delta g\, \Delta h_1} = 1$ (siehe Satz 3), so folgt, daß fast überall auf der g-Achse gilt:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta \varrho^2}{\Delta h\, \Delta h_1} = 1\,.$$

Da $\vartheta' \leqq 1$ ist, so nähert sich ϑ' von unten her dem Grenzwert 1. Von $\bar{\vartheta}$ läßt sich das nicht behaupten.

Zusatz. *Ist nur* $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ *umkehrbar, so ist doch* $\lim_{\Delta \to 0} \bar{\vartheta} = 1$ *und* $\lim_{\Delta \to 0} \vartheta' = 1$ *fast überall auf der* h_1*-Achse (bzw. umgekehrt).*

Denn $\vartheta_1 \to 1$ fast überall in h_1, $\vartheta \to 1$ fast überall in g, also wegen $0(g) \to 0(h)$ auch in h_1. Ferner ist aus demselben Grunde $f'(g) \neq 0$ ebenfalls fast überall in h_1, sowie auch $f_1'(g) \neq 0$, so daß $\bar{\vartheta} \to 1$ und damit wie oben durch Kombination $\vartheta' = \frac{\vartheta\, \vartheta_1}{\bar{\vartheta}^2} \to 1$ fast überall in h_1.

Ist endlich keines der beiden Integrale umkehrbar, aber $\varrho(x)$ monoton, so kann man noch behaupten, daß $\vartheta \to 1$, $\vartheta_1 \to 1$, $\bar{\vartheta} \to 1$ und $\vartheta' \to 1$ fast überall auf der ϱ-Achse. Denn da dann $0(g) \to 0(\varrho)$ gilt, so ist nach Hilfssatz 2 $\varrho'(g) = 0$ auf einer Nullmenge in ϱ, also wegen $\varrho'(g) = f'(g)\, f_1'(g)$ auch $f'(g) = 0$ und $f_1'(g) = 0$ nur auf einer Nullmenge in ϱ. Daraus folgen alle Behauptungen.

Satz 5. *Ist in* $\varrho(x) = \int_0^x \frac{df\, df_1}{dg}$ $f(x)$ *monoton, so ist* $\varrho(f)$ *totalstetig, und es gilt* $\varrho(f) = \int_0^f f_1'(g)\, df$.

Beim Beweis kann man $f_1(x)$ und damit $\varrho(x)$ als monoton voraussetzen. Andernfalls läßt sich $f_1(x)$ als Differenz zweier stetiger, monotoner Funktionen darstellen und damit der allgemeine Fall auf den speziellen zurückführen.

Da $\varrho'(g) = f'(g)\, f_1'(g)$ ist, so enthält die Menge, auf welcher $\varrho'(g) = 0$ gilt, diejenige, auf der $f'(g) = 0$ ist. Daraus folgt, daß $0(f) \to 0(\varrho)$ gilt (vgl. den Zusatz zu Satz 1). Wegen $0(g) \to 0(f)$ ist dann nach dem Hilfssatz 4 $\varrho'(f)\, f'(g) = \varrho'(g) = f'(g)\, f_1'(g)$ fast überall in g. Folglich ist $\varrho'(f) = f_1'(g)$ fast überall in f, denn $f'(g) = 0$ entspricht in f einer Nullmenge. Es folgt $\varrho(f) = \int_0^f \varrho'(f)\, df = \int_0^f f_1'(g)\, df$.

Ineinandergeschachtelte Hellingersche Integrale.

Satz 6. *Es sei* $\int_a^x \frac{df^2}{dg} = h(x) - h(a)$ *und* $\sigma(x)$ *eine weitere in* (a, b) *definierte, in bezug auf* h *totalstetige Funktion. Dann existiert folgendes Integral und hat den angegebenen Wert:*

$$\int_a^x \frac{d\sigma\, df^2}{dh\, dg} = \int_A^g \sigma'(h)\, f'^2(g)\, dg = \sigma(x) - \sigma(a)\,.$$

Bemerkung. Totalstetigkeit von $\sigma(g)$ genügt nicht zur Gültigkeit des Satzes.

Da $h(x)$ stetig und monoton ist, so ist $\sigma(x)$ stetig und von beschränkter Schwankung. Man untersucht auf der h-Achse die Summe

$$\left| \sum \left(\Delta\sigma - \frac{\Delta\sigma\, \Delta f^2}{\Delta h\, \Delta g} \right) \right| \leqq \sum |\Delta\sigma|\,(1 - \vartheta)\,,$$

unter ϑ denselben Ausdruck wie in Satz 3 verstanden. Für das Folgende vergleiche den Beweis jenes Satzes. Dort war gezeigt, daß $\Sigma \Delta h(1 - \vartheta)$ sich beliebig klein machen läßt durch Verkleinerung von Δ. Darin kann man Δh durch $|\Delta\sigma|$ ersetzen, weil wegen der Totalstetigkeit von $\sigma(h)$ zusammen mit $\sum_N \Delta h \to 0$ auch $\sum_N |\Delta\sigma| \to 0$ gilt, wo N eine Intervallmenge bedeutet, welche die Nullmenge enthält, auf der $\lim_{\Delta \to 0} \vartheta \neq 1$ ist. Außerdem ist die Gesamtschwankung $\Sigma |\Delta\sigma|$ beschränkt. Es folgt, daß es spezielle Einteilungsfolgen T_α gibt, für die

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum \frac{\Delta\sigma\, \Delta f^2}{\Delta h\, \Delta g} = \sigma(x) - \sigma(a)$$

ist.

Ferner ist zu zeigen, daß jede Einteilungsfolge T_β, deren größtes Intervall nach Null konvergiert, denselben Grenzwert hat, d. h. es ist die Existenz des Integrales $\int_a^b \frac{d\sigma\, df^2}{dh\, dg}$ zu erweisen.

Die Summenwerte der Einteilungsfolge T_α mögen mit S_α bezeichnet werden, diejenigen von T_β mit S_β. Also ist $\lim_{\Delta \to 0} S_\alpha = 0$, und es ist zu beweisen, daß auch $\lim_{\Delta \to 0} S_\beta = 0$ gilt.

Man wählt ein δ und eine zugehörige Einteilung der T_α-Folge, d. h. passende Teilintervallmengen M und N, so daß $\sum_N |\Delta\sigma| < \delta$ ist und ein Δ existiert, für welches innerhalb von M $1 - \vartheta < \delta$ ist. Sodann betrachtet man eine Einteilung der Folge T_β, deren größtes Intervall $\Delta_{\max} \leqq \Delta$ ist. Von einer gewissen Stelle an genügen alle dieser Bedingung. Der Menge N mögen n Intervalle angehören mit $2n$ Endpunkten. Diese werden von höchstens $2n$ Intervallen L' der T_β-Einteilung überdeckt, deren Gesamtlänge höchstens gleich $2n\, \Delta_{\max}$ ist. Das ganze Intervall zerfällt dann bei der T_β-Einteilung in drei Teile L', M' und N', wobei M' und N' die übrigbleibenden Teilmengen von M bzw. N sind. Für M' hat man wegen $\Delta_{\max} \leqq \Delta$

$$\sum_{M'} |\Delta\sigma|\,(1 - \vartheta) \leqq \delta \cdot \sum_{M'} |\Delta\sigma| \leqq \delta s\,,$$

wo s die Gesamtschwankung von $\sigma(h)$ bedeutet. Für N' gilt

$$\sum_{N'} |\Delta\sigma|\,(1 - \vartheta) \leqq \sum_{N'} |\Delta\sigma| \leqq \sum_N |\Delta\sigma| < \delta\,,$$

endlich für L'

$$\sum_{L'} |\Delta\sigma|\,(1 - \vartheta) \leqq \sum_{L'} |\Delta\sigma|\,.$$

Also insgesamt

$$S_\beta \leqq \delta s + \delta + \sum_{L'} |\Delta\sigma| .$$

Nun läßt man $\beta \to \infty$ streben. Da dann $\Delta_{\max} \to 0$, δ und n dagegen fest bleiben, so strebt die Gesamtlänge von L' nach Null, also wegen der Totalstetigkeit von $\sigma(h)$ auch $\sum_{L'} |\Delta\sigma|$. Hat daher eine Teilfolge der Summen S_β einen Häufungswert S'_β, so muß für ihn gelten:

$$0 \leqq S'_\beta \leqq \delta s + \delta .$$

Das gilt für jedes δ. Folglich ist jeder Häufungswert $S'_\beta = 0$, d. h. für die Summen S_β gibt es einen Grenzwert, und er ist gleich Null, w. z. b. w. [1]).

Andererseits hat man auf Grund der Totalstetigkeit von $\sigma(h)$ und von Hilfssatz 4

$$\sigma(x) - \sigma(a) = \sigma(h) - \sigma(\alpha) = \int_\alpha^h \sigma'(h)\, dh = \int_A^g \sigma'(h)\, h'(g)\, dg = \int_A^g \sigma'(h)\, f'^2(g)\, dg ,$$

wodurch auch der neue Integraltypus auf ein Lebesguesches Integral zurückgeführt ist.

Bemerkung. Setzt man in Satz 6 $\sigma(x) = g(x)$ und $a = 0$, $h(a) = 0$, so ergibt sich $\int_0^x \frac{df^2}{dh} = g(x)$, also die Umkehrbarkeit des Integrales $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$, d. i. scheinbar ein Widerspruch. Man ist indessen im allgemeinen nicht berechtigt $\sigma(x) = g(x)$ zu setzen, da die Voraussetzung nicht erfüllt ist. Es müßte $g(h)$ totalstetig sein, d. h. $0(h) \to 0(g)$ gelten. Dann ist nach b) S. 180 das Integral in der Tat umkehrbar.

Der Satz gilt ferner unter der schärferen Voraussetzung, daß $\int_a^x \frac{d\sigma^2}{dh}$ existiert, denn dann ist $\sigma(h)$ totalstetig (siehe d) S. 181).

Satz 7. *Falls* $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$, $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg} = h_1(x)$, $\int_0^x \frac{df\, df_1}{dg} = \varrho(x)$ *gegeben sind, so existieren die weiteren Integrale* $\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh}$ *und* $\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh_1}$, *u. zw. ist unter der Voraussetzung der Umkehrbarkeit von* $h(x)$ $\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh} = h_1(x)$ *und entsprechend bei derjenigen von* $h_1(x)$ $\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh_1} = h(x)$.

Aus der Beziehung $\Delta\varrho^2 \leqq \Delta h\, \Delta h_1$ (siehe S. 187) folgt direkt die Existenz der beiden neuen Integrale und die Abschätzungen $\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh} \leqq h_1(x)$, $\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh_1} \leqq h(x)$.

Ferner erkennt man, daß die Voraussetzung notwendig ist, denn soll z. B. allgemein $\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh} = h_1(x)$ sein, so folgt für $f_1(x) = g(x) = h_1(x)$ $\varrho(x) = f(x)$ und $\int_0^x \frac{df^2}{dh} = g(x)$, also eben die Umkehrbarkeit von $h(x)$.

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Es sei $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ umkehrbar. Nach dem Zusatz zu Satz 4 hat man dann fast überall auf der h_1-Achse $\frac{\Delta\varrho^2}{\Delta h\, \Delta h_1} = \vartheta' \to 1$. Daher rechnet man in h_1 und hat vermöge der mehrfach benutzten Schlußweise für eine geeignete Einteilungsfolge:

[1]) Dieser Beweis ist dem Existenzbeweis des Integrales $\int_0^x \frac{df^2}{dg}$ von Hellinger nachgebildet (siehe Diss., S. 28).

$$\sum \Delta h_1 - \sum \frac{\Delta \varrho^2}{\Delta h} = \sum \Delta h_1 (1 - \vartheta') < \delta ,$$

also, da die Existenz des Integrales schon bekannt ist, $\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh} = h_1(x)$.

Die zweite Aussage des Satzes ist der ersten analog. Man kann den Satz auch durch Zurückführung von $\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh}$ auf ein Lebesguesches Integral und formales Operieren mit ihm in der Art wie auf S. 184 vermittelst des Hilfssatzes 4 beweisen.

Folgerungen. Sind $h(x)$ und $h_1(x)$ beide umkehrbar, so ist auch $\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh} = h_1(x)$ umkehrbar im Einklang mit der Tatsache, daß dann nach Satz 4 fast überall auf der g-Achse, also auch auf der h-Achse, $\vartheta' \to 1$ gilt (vgl. Satz 3).

Wenn $h(x)$ umkehrbar ist, so gilt

$$\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh} = \int_0^x \frac{dh_1 df^2}{dh\, dg} ,$$

denn nach Satz 6 ist das Integral rechter Hand gleich $h_1(x)$. $h_1(h)$ ist totalstetig, weil $0(h) \to 0(g)$ und $0(g) \to 0(h_1)$ gilt, also auch $0(h) \to 0(h_1)$.

Satz 8. *Es sei* $\Delta f^2 \leqq \Delta g_1 \Delta g_2$, *und es mögen die beiden Integrale* $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg_1}$, $\int_0^x \frac{df_2^2}{dg_2}$ *existieren. Dann existieren auch die weiteren Integrale*

$$\int_0^x \frac{df^2}{dg_1}, \quad \int_0^x \frac{df^2}{dg_2}, \quad \varrho_1(x) = \int_0^x \frac{df\, df_1}{dg_1}, \quad \varrho_2(x) = \int_0^x \frac{df\, df_2}{dg_2}, \quad \int_0^x \frac{d\varrho_1^2}{dg_2}, \quad \int_0^x \frac{d\varrho_2^2}{dg_1},$$

und es gilt die Beziehung

$$\int_0^x \frac{df_1 d\varrho_2}{dg_1} = \int_0^x \frac{df_2 d\varrho_1}{dg_2}\ ^{1}) .$$

$\int_0^x \frac{d\varrho_1^2}{dg_2}$ existiert wegen $\Delta \varrho_1^2 \leqq \int_0^x \frac{df^2}{dg_1} \cdot \int_0^x \frac{df_1^2}{dg_1} \leqq \Delta g_2 \cdot \int_0^x \frac{df_1^2}{dg_1}$; ebenso $\int_0^x \frac{d\varrho_2^2}{dg_1}$.

Zunächst werde wieder $f(x)$ als monoton wachsend angenommen. Nach Satz 5 ist

$$\varrho_2(x) = \int_0^{g_1} f'(g_2)\, f_2'(g_2)\, dg_2 = \int_0^f f_2'(g_2)\, df .$$

Da ferner $\int_0^x \frac{df^2}{dg_1}$ existiert, also auch $0(g_1) \to 0(f)$ gilt, so kann man g_1 substituieren:

$$\varrho_2(x) = \int_0^{g_1} f_2'(g_2)\, f'(g_1)\, dg_1 .$$

Da auch $\int_0^x \frac{d\varrho_2^2}{dg_1}$ existiert, so ist

$$\int_0^x \frac{df_1 d\varrho_2}{dg_1} = \int_0^{g_1} f_1'(g_1)\, \varrho_2'(g_1)\, dg_1 = \int_0^{g_1} f_1'(g_1)\, f_2'(g_2)\, f'(g_1)\, dg_1 .$$

---

[1]) Es genügt auch, die Existenz der sechs Quadratintegrale vorauszusetzen.

Hierin kann man zu f zurückkehren:

$$\int_0^x \frac{df_1\, d\varrho_2}{dg_1} = \int_0^1 f_1'(g_1)\, f_2'(g_2)\, df\,.$$

Aus Analogiegründen ist auch

$$\int_0^x \frac{df_2\, d\varrho_1}{dg_2} = \int_0^1 f_1'(g_1)\, f_2'(g_2)\, df\,,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Ist $f(x)$ im allgemeinen von beschränkter Schwankung, so kann man den Beweis in üblicher Weise durch Zerlegung in zwei monotone Funktionen führen.

Sonderfälle. Nimmt man insbesondere $g_2(x) = h(x)$, wo $h(x) = \int_0^x \frac{df^2}{dg}$ ist $(g_1(x) = g(x))$, so braucht man nur die Existenz der drei Integrale $\int_0^x \frac{df^2}{dg}, \int_0^x \frac{df_1^2}{dg}, \int_0^x \frac{df_2^2}{dh}$ vorauszusetzen. Diejenige der drei anderen Quadratintegrale ist dann von selbst erfüllt. Der Satz lautet dann ausführlich geschrieben:

$$\int_0^x \frac{df_1\, d\int_0^x \frac{df\, df_2}{dh}}{dg} = \int_0^x \frac{df_2\, d\int_0^x \frac{df\, df_1}{dg}}{dh}\,.$$

Setzt man z. B. $f(x) = \chi(x)$, $f_1(x) = g(x) - \chi(x)$, also $h(x) = \chi(x)$ (vgl. Satz 2),

$$\int_0^x \frac{df\, df_1}{dg} = \int_0^x \frac{d\chi\, d(g-\chi)}{dg} = \chi - \int_0^x \frac{d\chi^2}{dg} = 0\,,$$

so folgt aus dem Satz, daß für jede Funktion $f_2(x)$, für die $\int_0^x \frac{df_2^2}{d\chi}$ existiert,

$$\int_0^x \frac{d(g-\chi)\, df_2}{dg} = 0, \quad \text{d. h.} \quad f_2(x) = \int_0^x \frac{d\chi\, df_2}{dg}$$

ist. Das ist tatsächlich der Fall, denn $\Sigma \Delta f_2 \left(1 - \frac{\Delta\chi}{\Delta g}\right)$ läßt sich beliebig klein machen. Man rechnet dazu in χ, dann ist fast überall $\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta\chi}{\Delta g} = 1$, und auf der übrigbleibenden Nullmenge kann $\Sigma \Delta f_2$ beliebig klein gemacht werden, da $0(\chi) \to 0(f_2)$ gilt.

Setzt man noch spezieller $f(x) = f_1(x) = f_2(x)$, so lautet die Behauptung des Satzes:

$$\int_0^x \frac{df\, d\int_0^x \frac{df^2}{dh}}{dg} = f(x).$$

Dieses kann man direkt leicht so einsehen: Die linke Seite ist in der Bezeichnungsweise $\int_0^x \frac{df^2}{dh} = \chi(x)$ von Satz 2 gleich $\int_0^g f'(g)\, \chi'(g)\, dg$. Da auf der Menge C der g-Achse

$f'(g) = 0$, $\chi'(g) = 0$ und auf D $\chi'(g) = 1$ ist (vgl. den Beweis des erwähnten Satzes), so folgt $\int_0^g f'(g)\,\chi'(g)\,dg = \int_0^g f'(g)\,dg = f(g)$.

Diese Formel kann man aber nicht etwa erweitern zu

$$\int_0^x \frac{d\varphi\, d\int_0^x \frac{df^2}{dh}}{dg} = \varphi(x)$$

mit einer beliebigen Funktion $\varphi(x)$, wie etwa das Gegenbeispiel $f(x) = \chi(x)$, $h(x) = \chi(x)$, $\varphi(x) = g(x) - \chi(x)$ lehrt, obgleich auch diese Formel, wie alle gültigen, durch formales Operieren mit dem d- und $\int$-Symbol entstehen würde. Das zeigt, wie schon die Tatsache der Nichtumkehrbarkeit gewisser Grundintegrale, daß das formale Operieren mit dieser Art von Integralen durchaus nicht immer erlaubt ist.

Folgerungen. Aus Satz 8 kann man durch zweimalige Anwendung auch Satz 7 folgern:

$$\int_0^x \frac{d\varrho^2}{dh} = \int_0^x \frac{\left(d\int_0^x \frac{df\,df_1}{dg}\right)^2}{dh} = \int_0^x \frac{df_1\, d\int_0^x \frac{df\, d\int_0^x \frac{df\,df_1}{dg}}{dh}}{dg} = \int_0^x \frac{df_1\, d\int_0^x \frac{df_1\, d\int_0^x \frac{df^2}{dh}}{dg}}{dg}.$$

Nun ist zwar allgemein nicht $\int_0^x \frac{df_1\, d\int_0^x \frac{df^2}{dh}}{dg} = f_1(x)$, wohl aber natürlich unter der Voraussetzung der Umkehrbarkeit von $h(x)$. In diesem Fall reduziert sich also der ganze Ausdruck auf $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg} = h_1(x)$, w. z. b. w.

Ist $f_1(x) = \int_0^x \frac{df\,dg_1}{dg}$ gegeben mit einer monotonen Funktion $g_1(x)$ und existieren außer den hierzu nötigen Quadratintegralen noch $\int_0^x \frac{dg^2}{dg_1}$ und $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg_1}$, so gilt die Umkehrungsformel

$$f(x) = \int_0^x \frac{df_1\,dg}{dg_1}.$$

Denn nach Satz 8 ist

$$\int_0^x \frac{df_1\,dg}{dg_1} = \int_0^x \frac{dg\, d\int_0^x \frac{df\,dg_1}{dg}}{dg_1} = \int_0^x \frac{df\, d\int_0^x \frac{dg\,dg_1}{dg_1}}{dg} = f(x).$$

Die Voraussetzungen sind dabei erfüllt, weil die Existenz von $\int_0^x \frac{dg^2}{dg}$ und $\int_0^x \frac{dg_1^2}{dg_1}$ trivial ist.

Satz 9. (Ergänzung zum vorigen Satz.) *Falls* $\Delta f^2 \leqq \Delta g_1 \Delta g_2$ *gilt und die beiden Integrale* $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg_1}$, $\int_0^x \frac{df_2^2}{dg_2}$ *existieren* (d. h. unter denselben Voraussetzungen wie bei Satz 8), *so existiert der neue Integraltypus* $\int_0^x \frac{df\,df_1\,df_2}{dg_1\,dg_2}$ [1]), *und es gilt*

$$\int_0^x \frac{df\,df_1\,df_2}{dg_1\,dg_2} = \int_0^x \frac{df_2\, d\int_0^x \frac{df\,df_1}{dg_1}}{dg_2}.$$

Zuerst werde der Sonderfall $g_2(x) = h(x)$ $(g_1(x) = g(x))$ bewiesen. Vorauszusetzen ist dann bloß die Existenz von $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$, $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg} = h_1(x)$, $\int_0^x \frac{df_2^2}{dh}$ (vgl. S. 192). Behauptet wird:

$$\int_0^x \frac{df\,df_1\,df_2}{dg\,dh} = \int_0^x \frac{df_2\,d\varrho}{dh}, \quad \text{wo } \varrho = \int_0^x \frac{df\,df_1}{dg} \quad \text{ist.}$$

Es gilt

$$\left| \sum \frac{\Delta f_2 \Delta \varrho}{\Delta h} - \sum \frac{\Delta f\,\Delta f_1 \Delta f_2}{\Delta g\,\Delta h} \right| = \sum \left| \frac{\Delta f_2}{\Delta h} \right| \left| \Delta \varrho - \frac{\Delta f\,\Delta f_1}{\Delta g} \right|$$

$$\leqq \sum \frac{|\Delta f_2|}{\Delta h} \sqrt{\Delta h\,\Delta h_1} \left\{ \left| 1 - \frac{\Delta \varrho}{(\operatorname{sgn} \Delta \varrho)\sqrt{\Delta h\,\Delta h_1}} \right| + \left| 1 - \frac{\Delta f\,\Delta f_1}{\Delta g (\operatorname{sgn} \Delta \varrho)\sqrt{\Delta h\,\Delta h_1}} \right| \right\}.$$

Hierin bedeutet $(\operatorname{sgn} \Delta \varrho)\sqrt{\Delta h\,\Delta h_1}$, daß die Wurzel in jedem Teilintervall Δ das Vorzeichen des zugehörigen $\Delta \varrho$ erhalten soll. Die Zerlegung in zwei Glieder ist nötig, weil man sonst auf $\frac{\Delta f\,\Delta f_1}{\Delta g\,\Delta \varrho}$ geführt wird, was nicht $\leqq 1$ zu sein braucht.

Man rechnet in g. Der Einfachheit halber sei zunächst die Summe

$$\sum \sqrt{\Delta h\,\Delta h_1} \left| 1 - \frac{\Delta \varrho}{(\operatorname{sgn} \Delta \varrho)\sqrt{\Delta h\,\Delta h_1}} \right|$$

untersucht. Es ist $\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta \varrho^2}{\Delta h\,\Delta h_1} = 1$, ausgenommen auf den Mengen C und C_1, wo $h'(g) = 0$ bzw. $h_1'(g) = 0$ ist. Ihnen entsprechen auf der h- bzw. h_1-Achse Nullmengen, die durch Intervalle so überdeckt werden, daß bei vorgegebenem δ ihre Gesamtlänge $\Sigma \Delta h < \delta$ bzw. $\Sigma \Delta h_1 < \delta$ ist. Diesen wiederum entsprechen auf der g-Achse Intervallmengen, die C bzw. C_1 überdecken. Auf ihnen kann obige Summe vermöge

$$\sum \sqrt{\Delta h\,\Delta h_1} \left| 1 - \frac{\Delta \varrho}{(\operatorname{sgn} \Delta \varrho)\sqrt{\Delta h\,\Delta h_1}} \right| \leqq \sum \sqrt{\Delta h\,\Delta h_1} \leqq \sqrt{\Sigma \Delta h} \cdot \sqrt{\Sigma \Delta h_1} < \delta$$

---

[1]) Ein ähnlicher Integraltypus, nämlich $\int_a^b \frac{df^\mu}{dg^{\mu-1}}$, μ ganz positiv, findet sich als Verallgemeinerung der Hellingerschen Integrale in einer Arbeit von Hobson, Math. Proc. London (2) **18** (1919). Hier ist jedoch die Verschiedenheit der Funktionen im Zähler sowie im Nenner wesentlich.

beliebig klein gemacht werden, da $\frac{\Delta\varrho^2}{\Delta h\,\Delta h_1} \leqq 1$ ist, und auf der Restmenge ebenfalls durch den Faktor $1 - \frac{\Delta\varrho}{(\operatorname{sgn}\Delta\varrho)\sqrt{\Delta h\,\Delta h_1}}$. Es mußte sgn $\Delta\varrho$ statt einfach $\Delta\varrho$ genommen werden, damit der Subtrahend hierin in jedem Fall $+1$, also die Differenz Null, als Grenzwert hat.

Im gegebenen Fall steht $\frac{|\Delta f_2|}{\sqrt{\Delta h}}$ an Stelle von $\sqrt{\Delta h}$. Das ändert aber nichts am Beweis, da $\sum\frac{\Delta f_2^2}{\Delta h}$ durch $\int_\Delta \frac{df_2^2}{dh}$ abgeschätzt werden kann und dieses wegen $0(h) \to 0\left(\int_0^x \frac{df_2^2}{dh}\right)$ dieselben Dienste wie h selbst leistet. Ferner kommt noch eine zweite, analog gebaute Summe hinzu. Jedoch bleibt $1 - \frac{\Delta f\,\Delta f_1}{\Delta g(\operatorname{sgn}\Delta\varrho)\sqrt{\Delta h\,\Delta h_1}}$ für die Intervallmengen unterhalb von 2 und strebt auf der Restmenge nach Null, da auf ihr Δ stets so klein gewählt werden kann, daß $\frac{\Delta f\,\Delta f_1}{\Delta g\,\Delta\varrho}$ und damit auch $\frac{\Delta f\,\Delta f_1}{\Delta g(\operatorname{sgn}\Delta\varrho)\sqrt{\Delta h\Delta h_1}}$ positiv ausfällt, also $\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta f\,\Delta f_1}{\Delta g(\operatorname{sgn}\Delta\varrho)\sqrt{\Delta h\,\Delta h_1}} = \lim_{\Delta\to 0}\sqrt{\frac{\Delta f^2}{\Delta g\,\Delta h}}\cdot\sqrt{\frac{\Delta f_1^2}{\Delta g\,\Delta h_1}} = 1$ ist. Demnach verhält sich die zweite Summe ebenso wie die erste, und man kann den üblichen Schluß durchführen, wonach der ganze Ausdruck beliebig klein gemacht werden kann.

Somit läßt sich für eine passende Einteilungsfolge die Existenz des Grenzwertes $\sum\frac{\Delta f\,\Delta f_1\,\Delta f_2}{\Delta g\,\Delta h}$ beweisen (weil die Existenz von $\int_0^x \frac{df_2 d\varrho}{dh}$ schon bekannt ist); daß er für jede Folge, deren größtes Intervall nach Null konvergiert, auch existiert und denselben Wert hat, wird analog zu S. 189 gezeigt.

Die Zurückführung des neuen Integraltypus auf ein Lebesguesches Integral geschieht wie in dem Beweis des Satzes 8. Am bequemsten geht man dabei von $\int_0^x \frac{df_2 d\varrho}{dh} = \int_0^h \varrho'(h) f_2'(h)\,dh$ aus und substituiert die Veränderliche g. Man erhält

$$\int_0^x \frac{df\,df_1\,df_2}{dg\,dh} = \int_0^g f'(g) f_1'(g) f_2'(h)\,dg\,.$$

Ein Beispiel, in dem $\int_0^x \frac{df^2}{dg}$ und $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}$ nicht umkehrbar sind, liefert $f(x) = \chi(x)$, $f_1(x) = g(x) - \chi(x)$, also $h(x) = \chi(x)$, $\varrho(x) = 0$, denn einerseits ist nach S. 192 $\int_0^x \frac{d(g-\chi)\,df_2}{dg} = 0$, falls nur $\int_0^x \frac{df_2^2}{d\chi}$ existiert, andererseits auch

$$\int_0^x \chi'(g)\,(1 - \chi'(g))\,f_2'(\chi)\,dg = 0\,,$$

da $\chi'(g)$ und $1 - \chi'(g)$ auf komplementären Mengen verschwinden.

Insbesondere folgt, daß $\int_0^x \frac{df^3}{dg\,dh} = f(x)$ gilt, was bei monotonem $f(x)$ auch direkt leicht zu zeigen ist. Man braucht nur in f zu rechnen, um $\Sigma\Delta f(1-\vartheta)$ beliebig klein machen zu können.

Ferner folgt, daß, falls $\int_0^x \frac{d\varphi^2}{dg}$ existiert,

$$\int_0^x \frac{d\varphi \, d \int_0^x \frac{df^2}{dh}}{dg} = \int_0^x \frac{df \, d \int_0^x \frac{df \, d\varphi}{dg}}{dh} = \int_0^x \frac{df^2 \, d\varphi}{dg \, dh}$$

gilt, obgleich dieses im allgemeinen nach S. 193 ungleich $\varphi(x)$ ist. Das stimmt damit überein, daß für die Gültigkeit von Satz 6 die Totalstetigkeit von $\sigma(g)$ nicht genügt.

Im allgemeinen Fall verläuft der Beweis entsprechend. Es bedeute $\varrho_1(x) = \int_0^x \frac{df \, df_1}{dg_1}$.

Es gilt

$$\sum \frac{|\Delta f_2|}{\Delta g_2} \left| \Delta \varrho_1 - \frac{\Delta f \, \Delta f_1}{\Delta g_1} \right| \leqq \sum \frac{|\Delta f_2|}{\Delta h} \left| \Delta \varrho_1 - \frac{\Delta f \, \Delta f_1}{\Delta g_1} \right| ,$$

weil $\Delta h = \int_\Delta \frac{df^2}{dg_1} \leqq \Delta g_2$ ist. Von dieser Summe ist aber schon gezeigt worden, daß sie beliebig klein gemacht werden kann, w. z. b. w.

Dieser Satz enthält auch einen Beweis von Satz 8 wegen der Gleichberechtigung von ϱ_1 und ϱ_2.

Nimmt man nicht an, daß $\Delta f^2 \leqq \Delta g_1 \Delta g_2$ gilt, so braucht man statt dessen die Existenz der Integrale $h(x) = \int_0^x \frac{df^2}{dg}, \int_0^x \frac{df^2}{dg_2}, \int_0^x \frac{dh^2}{dg_2}$, die alle aus der Ungleichung folgen,

außerdem aber noch diejenige von $\int_0^x \frac{dh_1^2}{dg_2}$, wo $h_1(x) = \int_0^x \frac{df_1^2}{dg_1}$ ist; denn dann kann man wie folgt abschätzen:

$$\sum \frac{|\Delta f_2|}{\Delta g_2} \left| \Delta \varrho_1 - \frac{\Delta f \, \Delta f_1}{\Delta g_1} \right| \leqq \sum \frac{|\Delta f_2|}{\sqrt{\Delta g_2}} \frac{\sqrt{\Delta h \, \Delta h_1}}{\sqrt{\Delta g_2}} \cdot \{K\}$$

und

$$\sum \frac{|\Delta f_2|}{\sqrt{\Delta g_2}} \frac{\sqrt{\Delta h \, \Delta h_1}}{\sqrt{\Delta g_2}} \leqq \sqrt{\int_\Delta \frac{df_2^2}{dg_2}} \cdot \sqrt[4]{\sum \int_0^x \frac{dh^2}{dg_2}} \cdot \sqrt[4]{\sum \int_0^x \frac{dh_1^2}{dg_2}} .$$

Das Integral $\int_0^x \frac{dh^2}{dg_2}$ leistet dasselbe wie h wegen $0(h) \to 0 \left(\int_0^x \frac{dh^2}{dg_2} \right)$ (siehe den Zusatz zu Satz 1). Entsprechendes gilt für h_1. $\{K\}$ bedeutet denselben Klammerausdruck wie auf S. 194.

Will man g_1 und g_2 vertauschen, so muß man noch die Existenz zweier weiterer entsprechender Integrale voraussetzen.

Die Zurückführung des neuen Integraltypus auf ein Lebesguesches Integral ist dank seinem Zusammenhang mit dem früheren Typus schon auf S. 192 im Beweisgang von Satz 8 geleistet. Es gilt

$$\int_0^x \frac{df \, df_1 \, df_2}{dg_1 \, dg_2} = \int_0^{g_1} f_1'(g_1) \, f_2'(g_2) \, f'(g_1) \, dg_1 = \int_0^{g_2} f_1'(g_1) \, f_2'(g_2) \, f'(g_2) \, dg_2 .$$

Riga, Herderinstitut, Februar 1933.

Eingegangen 27. Februar 1933.